با نام او

پیوست۱

الگوریتمِ روث_هرویتز،

برایِ تعیینِ تعدادِ ریشه‌هایِ سمتِ راستیِ یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی

اطلاع یافتن از ریشه های چند جمله‌ایِ مشخصه سامانه به لحاظ سمت چپی و یا راستی بودن، در بحث پایداری از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. الگوریتمی به نام روث-هرویتز ما را برای تشخیص تعداد ریشه‌های سمت راستی یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی، بسیار کمک می‌کند.

ما در اینجا به اینکه درستیِ این الگوریتم از کجا آمده است و یا چرا چنین نامی گرفته است، متأسفانه، کاری نداریم و فقط به چگونگیِ استفاده از آن می‌پردازیم. ابتدا الگوریتم را در حالت کلی مطرح و سپس با چند مثال نکات اساسی را گوشزد می‌کنیم.

معادلهٔ $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم تعداد ریشه های سمت راستی آن را تعیین کنیم.

در این روش لازم است ضرایب معادله در چند ردیف مرتب شود. برای این کـار ابتـدا دو ردیفِ اول را به ترتیبِ زیر بسازید:

$$\begin{array}{lllll} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ s^{n-2} & \downarrow & & & \\ \vdots & \ldots & & & \\ s^1 & \ldots & & & \\ s^0 & \ldots & & & \end{array} \qquad \text{(پ۱- ۱)}$$

آنگاه ردیفِ سوم را از رویِ دو ردیفِ اول به صورتِ زیر بسازید:

$$s^{n-2} \quad \frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_na_{n-3}}{a_{n-1}} \quad \frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_na_{n-5}}{a_{n-1}} \quad \frac{a_{n-1}a_{n-6}-a_na_{n-7}}{a_{n-1}} \qquad \text{(پ۱- ۲)}$$

توجه کنید که ستونِ اول در ردیفِ جدید، از دو ستونِ **اول** و دوم، سـتونِ دوم در ردیـفِ جدید، از دو ستونِ **اول** و سوم و به همین ترتیب تا ستونِ آخر که از دو ستونِ **اول** و آخرِ دو ردیفِ بالا درست می‌گردد.

سپس کافی است در ادامه، هر ردیفِ بعدی را از رویِ دو ردیفِ بالاترش دقیقاً به همـان ترتیبی که در بالا، ردیفِ سوم از رویِ دو ردیفِ اول ساخته شد، بسازید تا به ردیفِ s^0 برسید.

آنگاه، قاعدهٔ زیر برقرار است:

(پ۱- ۳) تعدادِ ریشه‌های سمتِ راستی = تعداد تغییرِ علامت‌هایِ رخ داده در ستونِ اول

در ادامه در ضمن مثال‌ها، نکاتِ ویژه‌ای در این روش، بیان می‌گردد.

مثال پ۱- ۱-

در اینجا ریشه‌ها را خودمان دانسته انتخاب می‌کنیم تا نتایج را مشاهده کنیم.

$$(s-1)(s+2)(s-5) = s^3 - 4s^2 - 7s + 10 \qquad (پ۱- ۴)$$

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & -7 \\ s^2 & -4 & 10 \\ s^1 & \frac{28-10}{-4} = \frac{-9}{2} & 0 \\ s^0 & \frac{-45-0}{-4.5} = 10 & \end{array} \qquad (پ۱- ۵)$$

از ابتدا نیز از رویِ منفی بودنِ بعضی ضرایب، مطمئن بودیم که حتماً ریشهٔ سمت راستی داریم، ولی نمی‌دانستیم چند تا؟! حالا معلوم شد که دو تا! چرا که دو تا تغییرِ علامت داریم!

مثال پ۱- ۲-

در اینجا تمامِ ضرایب مثبت‌اند ولی ببینیم آیا واقعاً ریشه سمت راستی داریم یا نه؟

$$s^4 + 16s^3 + 41s^2 + 20s + 2100 \qquad (پ۱- ۶)$$

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 41 & 2100 \\ s^3 & 16 & 20 & 0 \\ s^{\,2} & \frac{16\times41-20}{16} = \frac{636}{16} & \frac{61\times2100}{16} & \\ s^1 & \frac{\frac{636}{16}\times20-2100\times16}{\frac{636}{16}} = \frac{-32805}{\frac{636}{16}} & 0 & \\ s^0 & 2100 & & \end{array} \qquad (پ۱- ۷)$$

نتیجه: دو تا ریشهٔ سمتِ راستی دارد، چرا که دو تا تغییرِ علامت داریم!

مثال پ۱- ۳-

در این مثال برخورد می‌کنیم به اینکه در ستونِ اول صفر به وجود می‌آید و ادامهٔ کار را مشکل می‌کند. راه حل این خواهد بود که به جای آن $\epsilon > 0$ قرار می‌دهیم و کار را دنبال می‌کنیم:

$$s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 5 \tag{پ۱- ۸}$$

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 1 & 3 & 0 \\
s^2 & 0 = \epsilon > 0 & 5 & \\
s^1 & \frac{\epsilon \times 3 - 5}{\epsilon} = \frac{-5}{\epsilon} & 0 & \\
s^0 & 5 & &
\end{array} \tag{پ۱- ۹}$$

نتیجه: دو تا ریشهٔ سمتِ راستی دارد، چرا که دو بار تغییرِ علامت داریم!

در برخی موارد برخورد می‌کنیم به اینکه تمامِ یک ردیف صفر درمی‌آید که لازم است این ردیف را با مشتق‌گیری از چندجمله‌ایِ ردیفِ بالایش، احیا کنیم. این حالت خاص مفهومِ جالبی دارد و آن اینکه چند جمله‌ای ردیفِ بالا یک ضریب از چند جمله‌ای اصلی است که این یعنی ریشه‌هایش، ریشه‌های چند جمله‌ای اصلی نیز خواهد بود و چون این حتماً از چند جمله‌ایِ اصلی، کم درجه‌تر است، شاید ریشه‌هایش هم راحت‌تر قابلِ به دست آوردن باشند(مانند همین مثال).

مثال پ۱- ۴-

مطلوب است تعیین تعداد ریشه‌های سمت راستی چند جمله‌ای زیر:

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 4 \qquad \text{(پ۱- ۱۰)}$$

$$\begin{array}{llll} s^3 & 1 & 2 & \downarrow \quad 2s^2 + 4 \\ s^2 & 2 & 4 & \\ s^1 & \frac{0}{2} = 0 & 0 & \rightarrow \quad 8s + 0 \quad \Rightarrow \\ s^1_{(new)} & 8 & 0 & \\ s^0 & 5 & & \end{array} \qquad \text{(پ۱- ۱۱)}$$

نتیجه: هیچ ریشهٔ سمتِ راستی ندارد، چرا که هیچ تغییرِ علامت نداریم! ولی توجه کنید که عبارتِ $2s^2 + 4$ ضریبی از چند جمله‌ای اصلی است. لذا ریشه‌هایِ آن، ریشه‌هایِ چندجمله‌ایِ اصلی نیز هستند! یعنی ما دو ریشهٔ موهومیِ خالصِ $\pm\sqrt{2}j$ نیز داریم. ضمناً می‌توانید با خارج کردنِ این ضریب، ریشهٔ دیگر را نیز به دست آورید. توجه کنید:

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 4 = (s^2 + 2)(s + 2) \qquad \text{(پ۱- ۱۲)}$$

مثال پ۱- ۵-

k را برایِ پایداری تعیین کنید. ضمناً kیی را تعیین کنید که ریشه‌ها به ازایِ آن نوسانیِ کامل گردد.

$$s^3 + 2s^2 + 10 + k(s^2 + 2s) = s^3 + (k+2)s^2 + 2ks + 10 \qquad (\text{پ}۱-۱۳)$$

$$\begin{array}{llc} s^3 & 1 & 2k \\ s^2 & k+2 & 10 \\ s^1 & \frac{2k(k+2)-10}{k+2} = \frac{2(k^2+2k-5)}{k+2} & 0 \\ s^0 & 10 & \end{array} \qquad (\text{پ}۱-۱۴)$$

نتیجه: باید دو عبارتِ $k+2$ و $\frac{(k^2+2k-5)}{k+2}$ را بر حسبِ تغییراتِ k به طور هم‌زمان تعیین علامت نمود تا بتوان در نواحیِ گوناگونِ به دست آمده در مورد پایداری داوری نمود.

پس از تعیین علامت، نتیجه خواهید گرفت که: برایِ kهایِ کوچکتر از $\sqrt{6}-1$ دو ریشهٔ ناپایدار خواهد داشت و برایِ بزرگتر از آن پایدار خواهد بود. برایِ درست همین مقدار، نوسانیِ کامل خواهد بود با فرکانسِ حدودِ $1.7\,{}^{Rad}/_{s}$

تمرین پ ۱- ۱-

برایِ شرایطی که این دو عبارت صفر می‌شوند نیز بحث کنید و سعی کنید وضعیتِ ریشه‌ها را هر چه روشن‌تر تعیین کنید.

تمرین پ ۱- ۲-

با استفاده از الگوریتمی که آموختید در مورد تعداد ریشه‌های سمت راستیِ چندجمله‌ای‌های زیر قضاوت کنید. ضمناً چنانچه ریشه‌هایی را (در شرایط ویژه‌ای که ممکن است در میان اجرای روث-هرویتز برخورد کنید) می‌توانید تعیین کنید، آنها را نیز ارائه کنید.

$$s^5 + 3s^4 + 6s^3 + 18s^2 + 25s + 75 \qquad \text{(پ۱- ۱۵)}$$

$$s^5 + 3s^4 - 5s^3 - 15s^2 + 4s + 12 \qquad \text{(پ۱- ۱۶)}$$

$$2\mathrm{s}^4 + 3\mathrm{s}^3 + 6\mathrm{s}^2 + 9s - 1 \qquad \text{(پ۱- ۱۷)}$$

$$\mathrm{s}^7 + \mathrm{s}^6 + \mathrm{s}^5 + \mathrm{s}^4 + \mathrm{s}^3 + \mathrm{s}^2 + s + 1 \qquad \text{(پ۱- ۱۸)}$$

تمرین پ ۱- ۳-

دانشجویی معادله مشخصهٔ یک سامانه را به صورت زیر به دست آورده است و ضمناً امیدوار است، بزرگترین ثابت زمانی سامانه، کوچکتر از نیم ثانیه باشد.

$$\mathrm{s}^3 + 17s^2 + 82s - 120 \qquad \text{(پ۱- ۱۹)}$$

برای اینکه بتواند در مورد ثابت زمانیِ سامانه قضاوت نسبتاً خوبی داشته باشد، می‌خواهد به این سؤال پاسخ دهد: آیا این معادله، ریشه‌ای با مقدار حقیقی بزرگتر از ۲- دارد؟(یعنی سمت راست ۲- چند ریشه دارد؟) با استفاده از روش روث هرویتز به او کمک کنید.

ستایش از آن خداوند است.

مراجع

[1] Proter, B. Stability criteria for linear dynamical systems. New York: Academic Press, 1968.

[2] Gantmacher, F R. The theory of matrices. chelsea Publishing Company, 1960.

[3] Kuo, B C, and F Golnaraghi. Automatic Control Systems. 8nd Edition. Wiley, 2002.

با نام او

پیوست۲

تعیین مکان هندسی ریشه‌های یک چند جمله‌ای به ازای تغییر یک ضریب

همان طور که از عنوان این پیوست بر می‌آید در این بخش قرار است محاسبات و تحلیل‌های صرفاً ریاضیاتی و هندسی را بیاموزیم ولی باید توجه داشته باشید که این هندسه و محاسبات مربوطه بیشتر به درد مهندسان کنترل می‌خورد؛ البته به خاطر موضوع طراحیِ جبران‌ساز در حلقهٔ هدایت. اگر شناخت از خطا تا سرانجامِ اقدام علیه خطا را، بتوان با تابع تبدیل $H(s)G(s)$ بیان نمود، آنگاه همواره می‌توان گفت که قطب‌های همهٔ تابع تبدیل‌هایِ نتایج حلقه پاسخ‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$1+HG(s)=0 \quad \text{یا} \quad 1+k\frac{N(s)}{D(s)}=0 \quad \text{یا} \quad D(s)+k\,N(s)=0 \qquad (\text{پ}۲\text{- }۱)$$

البته به جز آنهایی که به دلیل حذف احتمالیِ صفر و قطب‌های G با H، دیگر در اینجا دیده نمی‌شوند. برای این موضوع به متنِ اصلی ذیل تعریف پایداری مراجعه گردد.

در متن اصلی شرح داده شد که مهندسان کنترل علاقه‌مند به تعیینِ جایِ این قطب‌ها (مکان هندسی قطب ها) به ازایِ تغییرِ ضریبِ k هستند. چراکه به این ترتیب می‌توانند k را به گونه‌ای تعیین کنند که این قطب‌ها در جایِ مورد نظر قرار گیرند.

در عبارات (پ۲-۱) D و N چندجمله‌ای‌های مخرج و صورتِ $H(s)G(s)$ هستند که به صورت خلاصه $HG(s)$ نمایش داده شده است. ضمناً در ادامه فرض بر این است که ضریب بزرگترین درجهٔ این دو چندجمله‌ای 1 است. یا به عبارت دیگر k همواره حاصلِ تقسیمِ ضریبِ بزرگترین درجهٔ صورتِ $HG(s)$ به ضریبِ بزرگترین درجهٔ مخرجِ آن است. در متنِ اصلی و ذیلِ مبحثِ رفتارشناسیِ تابع تبدیل‌ها، این ضریب را بهرهٔ پرشِ تابع تبدیلِ $HG(s)$ یا بهرهٔ مکان‌هندسی نامیده‌ایم. این نام‌گذاری، دقیقاً به مناسبتِ به کارگیریِ این بهره در اینجاست که به زودی خواهیم دید.

پس می‌توان رابطهٔ(پ۲-۱) را به هر یک از صورت‌های زیر درآورد:

$$1 + k\,\frac{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots} = 0 \qquad \text{(پ۲- ۲)}$$

یا

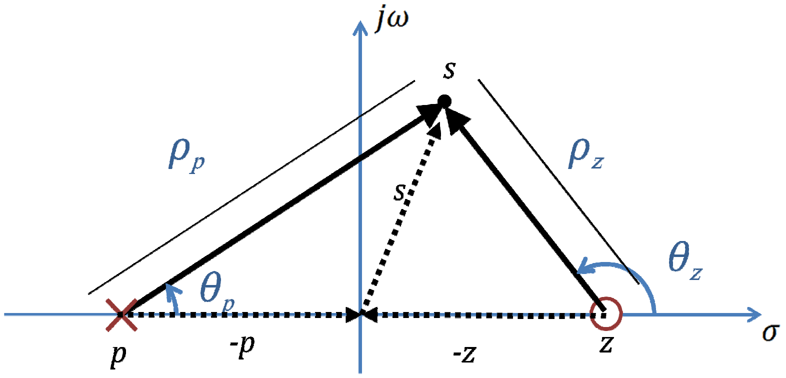
$$1 + k\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} = 0 \qquad \text{(پ۲- ۳)}$$

در تعیین مکان هندسی قطب‌های حلقه، صورتِ (پ۲- ۳)، بیشتر مورد استفاده است. در واقع در این کار فرض بر این است که ما از zها و pهایِ HG با خبـریم و مـی‌خـواهیم از جـایِ قطب‌هایِ نتیجهٔ حلقه ـ که همان ریشه‌های معادلهٔ بالاست ـ باخبر شویم.

برای آنکه نقطه‌ای بر رویِ مکان هندسی قطب‌های تابع تبدیل قرار گیرد لازم اسـت دو شرط رعایت شود. یکی را شرطِ زاویه و دیگری را شرطِ اندازه می‌نامند. این دو شرط نیز به سادگی از روی همان معادلهٔ بالا به دست می‌آید:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{k} = \begin{cases} \left|\frac{1}{k}\right| \angle \pm 180\,,\ldots : \ \pi \text{ضرایبِ فرد} & k > 0 \\ \left|\frac{1}{k}\right| \angle 0\,, \pm 360\,,\ldots : \ \pi \text{ضرایبِ زوج} & k < 0 \end{cases} \qquad \text{(پ۲- ۴)}$$

از این عبارت هر دو شرط زاویه و اندازه نتیجه می‌شود. در ادامه باید توجه کنیم کـه بـه لحاظ هندسی هر عبارت مانندِ $s - z$ ، معادلِ برداری است که ابتدایِ آن جایِ صفرِ z و پایانِ آن مکانِ s است. در شکل زیر یک نمونه بردارِ واصل از صفر به مکان و یک نمونـه بـردار واصـل از قطب به مکان رسم شده‌اند. این بردار زاویه و اندازه‌ای دارد و برای آنکه s بر روی مکان هندسـی قطب‌های حلقه (ریشه‌های معادله (پ۲-۱) قرار گیرد لازم است مقدار زاویه و اندازه آن شرط‌های مذکور را رعایت کند.



شکل پ۲– ۱ — هر عبارت مانند *s-z* یا *s-p* را می‌توان با یک بردار نشان داد؛ زوایا و اندازه‌های این بردارها به همراه بردارهای *s*، *-p* و *−z* بر روی شکل نشان داده شده‌اند.

اگر همهٔ این بردارهای ممکن را در نظر بگیریم، می‌توان شرط زاویه و شرط اندازه را برای قرار گرفتن بر روی مکان هندسی قطب‌های حلقه (روی مکان بودن) به صورت زیر بیان نمود.

(پ۲– ۵) $=$ زوایایِ بردارهای واصل از قطب‌ها − زوایایِ بردارهای واصل از صفرها

$$\begin{cases} -180° + 2n(180) & k > 0 \\ 0° + 2n(180) & k < 0 \end{cases}$$

(پ۲– ۶)
$$|k| = \frac{\text{حاصل ضرب اندازه‌های بردارهای واصل از قطب‌ها}}{\text{حاصل ضرب اندازه‌های بردارهای واصل از صفرها}}$$

اگر همین عبارات را با نمادها بنویسیم خواهد شد:

(پ۲– ۷)
$$\sum_{j=1}^{m} \theta_z(j) - \sum_{i=1}^{n} \theta_p(i) = \begin{cases} -180° + 2l(180) & k > 0 \\ 0° + 2l(180) & k < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}\rho_p(i)}{\prod_{j=1}^{m}\rho_z(j)} = |k| \qquad \text{(پ۲- ۸)}$$

در همهٔ نتایجی که در ادامه برای مکان هندسی ارائه می‌گردد، از شرط زاویه استفاده می‌شود. شرط اندازه فقط برای به دست آوردن بهرهٔ متناظر با مکانِ مورد نظر به کار می‌رود. لذا عموماً در پایان محاسبات به کار گرفته می‌شود.

فرض می‌شود همه ضرایبِ چندجمله‌ای‌های N و D حقیقی است. این فرض نتیجهٔ مهمی دارد و آن این است که همهٔ ریشه‌های صورت و مخرج یعنی صفرها و قطب‌های بهرهٔ حلقه و همین طور همهٔ ریشه‌هایی که به دنبال مکان هندسیِ آنهاییم (یعنی قطب‌های نتیجهٔ حلقه)، همه و همه، یا حقیقی‌اند یا اگر مختلط باشند حتماً مزدوجشان نیز جزو ریشه‌هاست. یعنی قطب‌ها و صفرهای بهره حلقه و مکان هندسی قطب های حلقه به لحاظ هندسی نسبت به محور حقیقی متقارن‌اند و یا به عبارت دیگر محور حقیقی محور تقارنِ آنهاست.

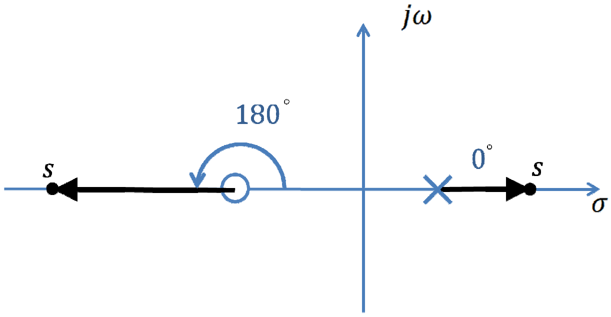
مکان از قطب‌ها آغاز و به صفرها ختم می‌گردد.

می‌توان نشان داد که همه مسیرهایی که بخشی از مکان هندسی قطب ها هستند با زیاد شدن k از مقدار 0، از قطب‌ها آغاز و به صفرها ختم می‌شوند. کافی است توجه کنید که برای زاویهٔ بردار واصل از هر قطب به خودش یا از هر صفر به خودش، هر مقداری را می‌توان نسبت داد. لذا هر قدر که در شرط زاویه برایِ اینکه مکان رویِ آنها باشد، کم آوردیم، می‌شود زاویه‌ای که مکان، از آن قطب بیرون و یا به آن صفر فرود می‌آید.

بنابراین معلوم شد که همهٔ صفر و قطب‌های HG جزو مکان است. حال فقط کافی است استدلال کنیم که چرا می‌گوییم از قطب‌ها شروع و به صفرها ختم می‌گردد. برای این کار کافی است به شرط اندازه توجه کنید. شرط اندازه برای جایِ قطب‌ها به دست می‌دهد: $|k| = 0$ و برای جایِ صفرها به دست می‌دهد: $|k| = \infty$، به عبارت هندسی یعنی به ازایِ تغییراتِ اندازهٔ بهرهٔ پرش $|k|$، از 0 تا ∞، مکان از قطب‌ها شروع و به صفرها ختم می‌گردد.

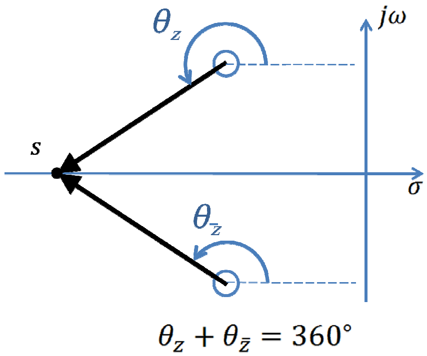
همهٔ محور حقیقی هم بخشی از مکان و هم محور تقارنِ مکان است.

برای درک چرایی و چگونگی این اصل، کافی است توجه کنید که هر بردار واصل از هر قطب و صفرِ حقیقی، به هر نقطهٔ دلخواه از محور حقیقی، با محور زاویهٔ $0°$ دارد یا $180°$ می‌سازد. $0°$ هنگامی است که مکان، سمتِ راست آن صفر یا قطب است و $180°$ هنگامی که مکان، سمتِ چپ است! شکل پ۲– ۲ را ببینید.



شکل پ۲– ۲ – زاویه بردار کشیده‌شده از هر صفر و قطب روی محور حقیقی، با هر نقطه روی آن محور $0°$ یا $180°$ می‌شود.

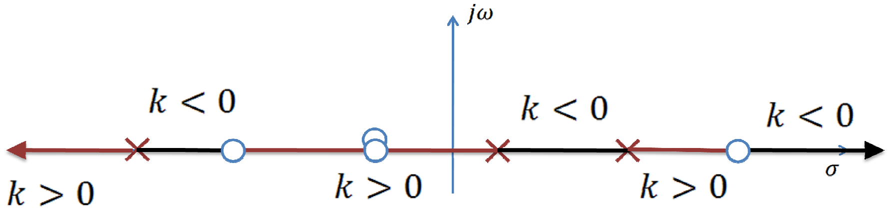
مجموع دو زاویهٔ بردارهایِ واصل از قطب‌ها یا صفرهای مختلط مزدوج به هر نقطهٔ دلخواه از محور حقیقی نیز برابر با $360°$ می‌شود و لذا هیچ تأثیری رویِ شرط زاویه برای این نقاط ندارد. شکل پ۲– ۳ را ببینید.



شکل پ۲– ۳ – مجموع زوایای بردار کشیده‌شده از هر صفر (یا قطب) مختلط به هر نقطه روی محور حقیقی برابر با $360°$ می-شود.

به این ترتیب مجموع زوایا برای هر نقطهٔ دلخواه از محور حقیقی، یـا ضـریب فـرد و یـا ضریب زوج $180°$ است که این یعنی همهٔ محور حقیقی جزو مکان است.

ولی حالا پرسش این است که چه قسمتی از محور به ازای kهای مثبت بخشی از مکان هندسی را تشکیل می‌دهد و چه قسمتی برای kهایِ منفی است؟ پاسخ ساده است، کافی اسـت از راست‌ترین قسمت محور حقیقی ـ جایی که هنوز به هیچ یک از قطب‌ها و یا صفرها نرسیده‌ایـم ـ شروع کنیم و آرام آرام به سمتِ چپ بیاییم. تا پیش از آنکه به صفر یا قطبی برسیم مکـان بـرای kهای منفی است، یعنی به ازای k های منفی قطبی بر روی این قسمت قرار دارد. پـس از اولـین قطب یا صفرِ آن تا قطب و یا صفر بعدی، مکان برای kهایِ مثبت است و به همین ترتیب یک در میان مکان بینِ منفی‌ها و مثبت‌ها جابجا می‌گـردد. چرایـیِ آن را خودتـان بـه آسـانی مـی‌توانیـد استدلال کنید! در شکل پ۲- ۴ این موضوعِ ساده برای یک نمونه نشان داده شده است.

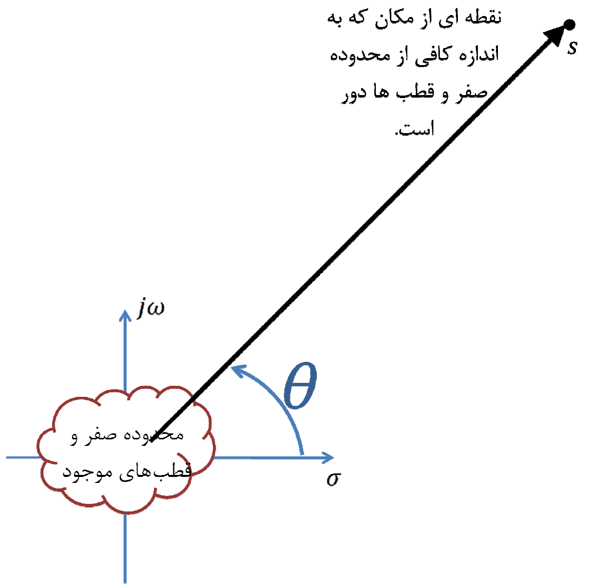


شکل پ۲- ۴ – تمام محور حقیقی جزء مکان است؛ در شکل نشان داده شده است که هر بخش از محور به ازای چه مقادیری از k در مکان قرار دارد.

به تعدادی که قطبها از صفرها کمترند، مکان دارایِ شاخه‌های بینهایت خواهد بود

دیدیم که مکان از قطب‌ها شروع و به صفرها ختم می‌گردد. ولی اگر تعداد قطب‌ها از تعداد صفرها بیشتر باشد، با ازدیاد $|k|$، به تعدادِ این اختلاف، مکان کجا خواهد رفت؟! به راحتی می‌توان دید که مکان در چنین شرایطی لازم است که به سمتی حرکت کند که به لحاظ اندازه، بردارهای واصل به طور نسبی، بسیار بزرگ گردند. اصطلاحاً در این شرایط می‌گوییم، مکان به شاخه‌های بینهایت میل می‌کند. تعداد این شاخه‌ها نیز به همان تعدادِ بیشتر بودنِ قطب‌ها از صفرهاست. یعنی اگر مثلاً HG دو قطب داشته باشد و صفری نداشته باشد، آنگاه مکان دو شاخهٔ بینهایت دارد و اگر این اختلاف سه تا باشد، سه شاخه و به همین ترتیب. در واقع به تعدادِ صفرهای موجود، با ازدیادِ $|k|$، قطب‌هایی به این صفرها نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردند و تعدادی که سرشان بی‌کلاه می‌ماند به سمتِ بسیار بزرگ شدن می‌روند و اصطلاحاً به شاخهٔ، به بینهایت‌رونده‌ای مجانب می‌گردند.

و اما حالا باید بتوان این شاخه‌ها را رسم نمود تا بدانیم روند مکـان تحـت ایـن شـرایط چگونه است. کافی است به شرط زاویه و شکل پ۲- ۵، که شـرایطِ دور شـدنِ مکـان از صـفر و قطب‌های موجود را نشان می‌دهد، دقت کنیم. چون این قسمت از مکان به اندازهٔ کافی از قطب و صفرها فاصله گرفته و دور شده است، زاویهٔ واصل به آن از طرفِ همهٔ آنها تقریبـاً یکسـان اسـت. اگر این زاویه را θ بنامیم، شرط زاویه می‌دهد:



شکل پ۲- ۵- زاویه‌های کشیده شده از قطب‌ها و صفرها به نقاطی از مکان که به اندازه کافی از آنها فاصله دارد با هم برابرند.

$$(n_p - n_z)\theta = \begin{cases} (2n+1)(180) & k > 0 \\ 2n(180) & k < 0 \end{cases} \rightarrow \qquad \text{(پ۲- ۹)}$$

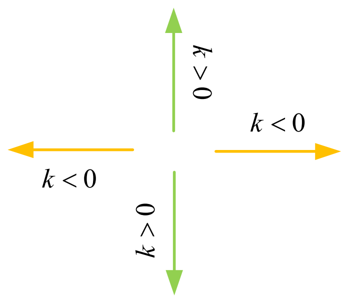
$$\theta = \begin{cases} \dfrac{(2l+1)180}{\Delta n} & k > 0 \\ \dfrac{(2l)180}{\Delta n} & k < 0 \end{cases}$$

با توجه به رابطه به دست آمده برای Δn های مختلف می‌توان تعداد مجانب‌ها (شاخه-های بینهایت) را تعیین کرد.

$$\Delta n = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \theta_{k>0} = 180^\circ \\ \theta_{k<0} = 0^\circ \end{cases} \tag{پ۲- ۱۰}$$

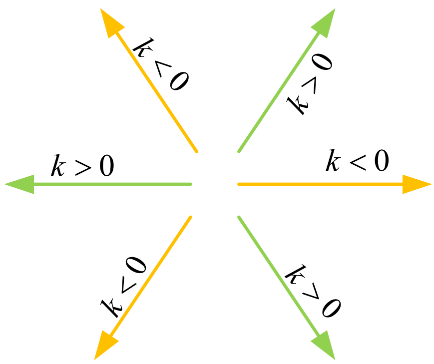
شکل پ۲- ۶ – در حالتی که تعداد قطب‌ها تنها یکی از تعداد صفر ها بیشتر باشد یک شاخه بینهایت وجود دارد.

$$\Delta n = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \theta_{k>0} = 90^\circ \;, -90^\circ \\ \theta_{k<0} = 0^\circ \;, \; 180^\circ \end{cases} \tag{پ۲- ۱۱}$$



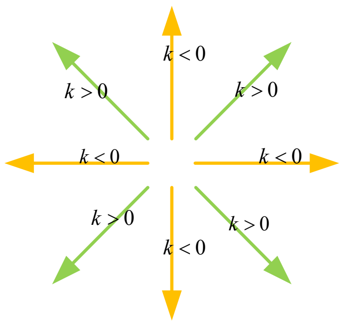
شکل پ۲- ۷ - در حالتی که تعداد قطب‌ها دوتا از تعداد صفرها بیشتر باشد دو شاخه بینهایت وجود دارد که بر هم عمودند.

$$\Delta n = 3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \theta_{k>0} = 60^\circ \;, 180^\circ \;, -60^\circ \;, \\ \theta_{k<0} = 0^\circ \;, \; 120^\circ \;, -120^\circ \end{cases} \tag{پ۲- ۱۲}$$



شکل پ۲- ۸ - در حالتی که تعداد قطب‌ها سه تا از تعداد صفر ها بیشتر باشد سه شاخه بینهایت وجود دارد.

$$\Delta n = 4 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \theta_{k>0} = 45^\circ \ , 135^\circ , -135^\circ , -45^\circ \\ \theta_{k<0} = 0^\circ \ , \ 90^\circ \ , 180^\circ , -90^\circ \end{cases} \qquad \text{(پ۲- ۱۳)}$$



شکل پ۲- ۹ – برای $\Delta n = 4$ چهار شاخه بینهایت به صورت متقارن رسم می شود.

به این ترتیب تعداد شاخه‌ها و سپس زوایهٔ هر یک بر حسب Δn به دست آمدند. حالا لازم است معین شود که این شاخه‌ها دقیقاً در کجایِ صفحه قرار می‌گیرند؟! برای این کافی است

از تقارن استفاده نمایید و توجه کنید که اولاً همهٔ شاخه‌ها در یک نقطه رویِ محور حقیقی متقاطع‌اند. ثانیاً این نقطهٔ تقاطع محلِ مرکزیتِ صفرها و قطب‌هاست که از عبارت زیر به دست می‌آید:

$$c = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{\Delta n} \qquad \text{(پ۲- ۱۴)}$$

به این ترتیب به راحتی می‌توان شاخه‌ها را به دقت رسم کرد و توجه داشت که وقتی اندازهٔ بهرهٔ مکان افزایش می‌یابد و بسیار بزرگ می‌شود، مکان به آنها میل خواهد داشت. ضمناً توجه کنید که در عبارت بالا مقدار موهومیِ قطب‌ها و صفرها هیچ مهم نخواهد بود و فقط کافیست از مقدار حقیقیِ آنها استفاده کنید. چراکه مزدوج‌ها، مقدار موهومیِ یکدیگر را خنثی می‌کنند.

نقاط جدایش از محورهای تقارن یا فرود به این محورها به ویژه محور حقیقی، در معادله‌ای مستقل از مقدارِ بهرهٔ مکان، صدق می‌کنند و به این ترتیب به دست می‌آیند.

این معادله با توجه به این نکته به دست می‌آید که جدایش یا فرود به محور تقارن به معنای وجود ریشهٔ مکرر در آنجا است. وجود ریشه مکرر نشان می دهد که این نقاط علاوه بر اینکه ریشهٔ معادلهٔ اصلی‌اند ریشهٔ مشتقِ آن نیز هستند. این موضوع به صورتی که در زیر می‌آید، معادلهٔ ویژه‌ای مستقل از k را برای آنها به دست می‌دهد:

$$\left.\begin{aligned} D(s) + k\,N(s) &= 0 \\ D'(s) + k\,N'(s) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(پ۲- ۱۵)}$$

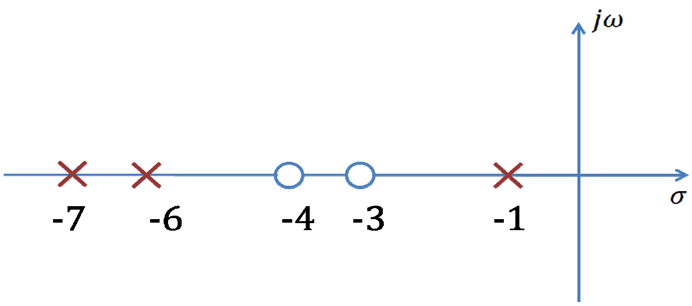
$$\rightarrow \quad ND' - N'D = 0 \quad \rightarrow$$ ریشه‌های مکرر احتمالی (پ۲- ۱۶)

باید به طور جدی یادآور شویم که ریشه‌هایِ این معادله حتماً ریشه‌های مکرر نیستند ولی همهٔ ریشه‌های مکرر ریشه‌های این معادله‌اند.

حال با اجرای چند نمونه موارد بالا را به کار می‌گیریم و چگونگیِ یافتنِ مکان را تمرین می‌کنیم.

مثال پ۲- ۱-

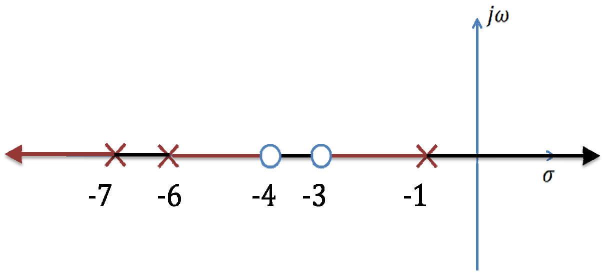
مکان را برای وضعیت داده شدهٔ صفر و قطب‌های حلقه در شکل زیر تعیین کنید و بهرهٔ مکانِ نظیرِ ریشه‌های داده شده رویِ مکان را به دست آورید.



شکل پ۲- ۱۰ – ترکیب قطب و صفر تابع تبدیل حلقه باز؛ مثال پ۲-۱

قبل از هرچیز برای جلوگیری از سردرگمی مکان را ابتدا برای بهره‌های مثبت و سپس منفی به طور جداگانه رسم می‌کنیم ابتدا از محور حقیقی شروع می‌کنیم. به راست‌ترین قطب یا صفر موجود روی محور حقیقی توجه می‌کنیم، که در اینجا قطبی است در -1 . از آن به قبل همهٔ

محور مکان است برای kهای منفی و سپس بینِ آن و بعدی که صفری است در -3 مکان است برای بهره‌های مثبت و به همین ترتیب یک در میان جابجا می‌گردد، که حاصل در شکل پ۲-۱۱دیده می‌شود.



شکل پ۲- ۱۱ - تعیین بخش های مختلف محور حقیقی به عنوان جزئی از مکان؛ خطوط سیاه مکان به ازای بهره مثبت و خطوط قرمز به ازای بهره منفی است.

اما دربارهٔ شاخه‌های بینهایت: چون $\Delta n = 1$ پس برای $k > 0$ یک شاخه به سمتِ $180°$ و برای $k < 0$ نیز یک شاخه به سمتِ $0°$ خواهیم داشت. در واقع برای $k > 0$، مکان که از قطبِ -7 شروع می‌کند، به $-\infty$ میل می‌کند و برای $k < 0$ ، مکان که از قطبِ -1 شروع می‌کند، به $+\infty$ میل می‌کند.

برای $k > 0$ مکان از قطبِ -1 و -6 شروع می‌کند و به ترتیب به صفرهای -3 و -4 میل می‌کند. اما برای $k < 0$ مکان از دو قطبِ -6 و -7 شروع می‌کنند، به سمت هم می‌آیند و در جایی به یکدیگر می‌رسند (به شکل پ۲- ۱۲توجه کنید). سپس ناچار از محور حقیقی جدا می‌شوند. یکی به بالا و دیگری به پایین (به سمتِ دو صفر) حرکت می‌کند. ناچار با هم در جایی بینِ آن دو فرود می‌آیند و دوباره از هم جدا می‌شوند و سپس به سمتِ آن دو صفر میل می‌کنند.

این نقاط جدایش و فرود را می‌توان از معادلهٔ (پ۲- ۱۶) دقیقاً به دست آورد. برای ایـن مثال داریم:

$$N(s) = (s+3)(s+4)$$ (پ۲- ۱۷)

$$D(s) = (s+1)(s+6)(s+7)$$ (پ۲- ۱۸)

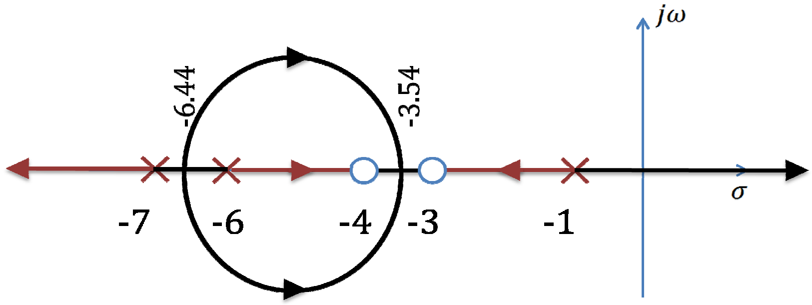
$$ND' - N'D = \big((s+1)(s+6) + (s+1)(s+7) +$$ (پ۲- ۱۹)

$s+6s+7s+3s+4-s+4+s+3s+1s+6s+7=0$

$$\rightarrow \quad s^4 + 14s^3 + 79s^2 + 252s + 366 = 0 \quad \rightarrow$$ (پ۲- ۲۰)

$$s_1 = -6.44 \;,\;\; s_2 = -3.54$$ (پ۲- ۲۱)

در شکل پ۲- ۱۲به صورت کامل مکان به دست آمده نمایش داده شده‌است. باید توجه کنید که معادلهٔ درجهٔ ۴ به دست آمده دو پاسخ دیگر نیز دارد که مختلطانـد. چـون مـا بـه دنبـال همین دو پاسخ حقیقیِ خودمان بودیم، فقط همین‌ها را مورد استفاده قرار دادیم. حل ایـن معادلـه گاهی با دست آسان نیست و لازم است ریشه های آن با سعی و خطا به دست آید. ولی این نبایـد شما را نگران کند چون معمولاً به دست آوردنِ دقیقِ آنها مورد نظر نیست.



شکل پ۲- ۱۲ – مکان هندسی قطب‌های حلقه بسته مثال پ۲-۱، به ازای بهره‌های مثبت و منفی

حال در ادامه بهرهٔ نظیرِ مکانِ -1.5 را به دست می‌آوریم تا نحوهٔ بـه کـارگیریِ شـرط بهره نیز برایتان آشنا گردد:

$$k_{-1.5}=\frac{0.5\times4.5\times5.5}{1.5\times2.5}=3.3 \quad \text{(پ۲- ۲۲)}$$

همین طور برای -5.5 و برای -8 به دست می‌آوریم:

$$k_{-5.5}=\frac{4.5\times0.5\times1.5}{1.5\times2.5}=0.9\ \ ,\ k_{-8}=\frac{7\times2\times1}{5\times4}=0.7 \quad \text{(پ۲- ۲۳)}$$

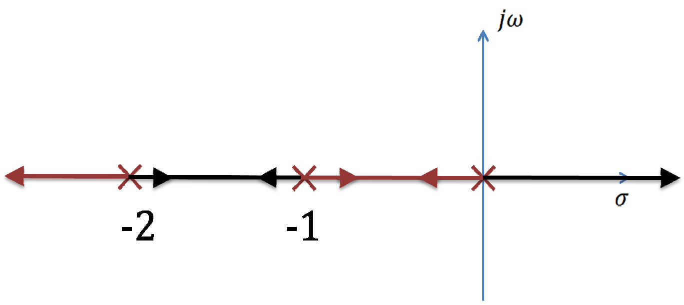
تمرین پ۲- ۱-

برای نقاط جدایش و فرود که در بالا به دست آمدند، بهرهٔ نظیر را بیابید.

مثال پ۲- ۲-

مسیر قطب‌های حلقه(بسته) را برای تابع تبدیل بهرهٔ حلقهٔ(بازِ) $\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ رسم کنید.

حل: ابتدا تکلیف محور حقیقی را روشن می‌کنیم:



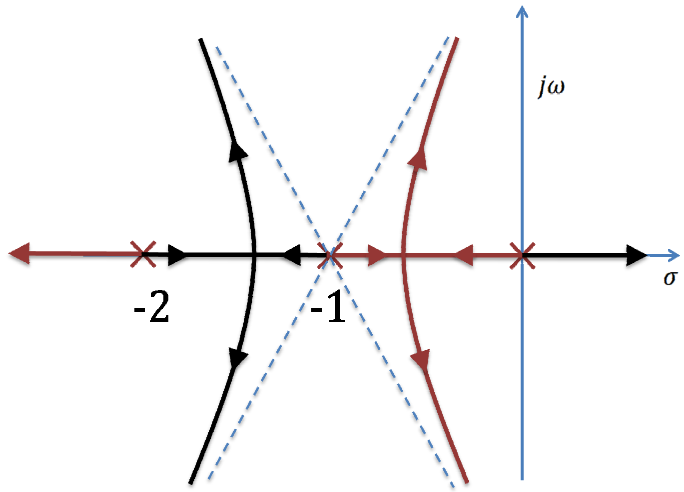
شکل پ۲- ۱۳ – تعیین بخش های مختلف محور حقیقی به عنوان جزئی از مکان به ازای بهره های مثبت و منفی

سپس شاخه‌های بینهایت را به دست می‌آوریم و رسم می‌کنیم، چون ۳ عدد قطب بیش از صفر داریم یعنی $\Delta n = 3$ پس شاخه‌ها مطابق با شکل پ۲- ۱۴خواهند بود. برای $k > 0$ روشن است که منحنی مکان از دو قطبِ 0 و -1 به سمت هم حرکت می‌کنند تا اینکه در نقطه-ای مضاعف و از محور حقیقی جدا می‌گردند. سپس یکی به سمتِ شاخهٔ $60°$ و دیگری به سمتِ شاخهٔ $-60°$ میل خواهند نمود(به شکل پ۲- ۱۴ توجه کنید). از طرف دیگر، مکان هندسی از قطبِ -2 شروع می‌شود و روی شاخهٔ $180°$ به سمتِ $-\infty$ میل می‌کند. همان طور که در شکل دیده می‌شود برای $k < 0$ نیز مشابهِ همین منحنی رسم می‌شود.

بیایید سعی کنیم مکان دو نقطهٔ جدایش را دقیقاً به دست آوریم. البته می‌دانیم یکی بینِ 0 و -1 و دیگری بین -1 و -2 است. برای این منظور کافی است معادلهٔ زیر را تشکیل دهیم:

$$ND' - N'D = 1\big(s(s+1) + s(s+2) + (s+1)(s+2)\big) - 0 \cdot D = 3s^2 + 6s + 2 = 0 \quad \text{(پ۲- ۲۴)}$$

$$\rightarrow \quad s_1 = -0.42 \qquad s_2 = -1.58 \tag{پ۲- ۲۵}$$



شکل پ۲- ۱۴ - مکان هندسی قطب‌های حلقه بسته مثال پ۲- ۲

فرض کنید بهرهٔ مکان را برای همین نقاط جدایش بخواهید، داریم:

$$|k|_{-0.42} = \frac{0.42\times0.58\times1.58}{1} = 0.387 \quad \rightarrow \quad k = +0.387 \tag{پ۲- ۲۶}$$

$$|k|_{-1.58} = \frac{0.42\times0.58\times1.58}{1} = 0.387 \quad \rightarrow \quad k = -0.387 \tag{پ۲- ۲۷}$$

و اما چگونه می‌توان محلِ تقاطعِ با محور موهومی را دقیقاً یافت؟ کافی است از روش روث ـ هرویتز (که برای تشخیص ریشه‌های سمت راستی است) استفاده کنیم و k را برای مرز ناپایداری بیابیم:

$$1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0 \tag{پ۲- ۲۸}$$

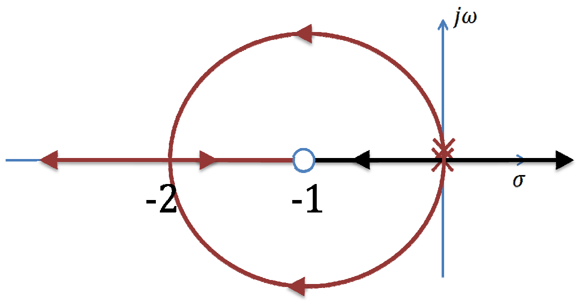
$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k \\ s^1 & \frac{6-k}{3} & 0 \\ s^0 & k & 0 \end{array} \qquad \text{(پ۲- ۲۹)}$$

$$\left(\text{ریشهٔ ردیف دوم}\right) \rightarrow k = 6 \ \rightarrow 3s^2 + 6 = 0 \rightarrow \ s = \pm\sqrt{2}j \qquad \text{(پ۲- ۳۰)}$$

مثال پ۲- ۳-

این بار برای تابع تبدیل بهرهٔ حلقه $\frac{s+1}{s^2}$ منحنی مکان را رسم و نقاط جدایش یا فرود به محور حقیقی را تعیین کنید.

منحنی مکان در شکل پ۲- ۱۵ نشان داده شده است.



شکل پ۲- ۱۵ - مکان هندسی قطب‌های حلقه بسته مثال پ۲-۳

برای نقاط جدایش و فرود با توجه به رابطه (پ۲- ۱۶) داریم:

$$ND' - N'D = (s+1)(2s) - s^2 = 0 \ \rightarrow \ s_1 = 0 \ , \ s_2 = -2 \qquad \text{(پ۲- ۳۱)}$$

توجه ویژه کنید که $s_1 = 0$ از پیش نیز معلوم بود، چراکه مکان برای $k > 0$ چاره‌ای از جدایش در آنجا نداشت.

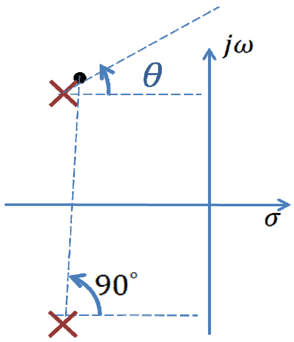
تمرین پ۲- ۲-

بهرهٔ مکانِ نظیر نقطهٔ جدایش را در مثال بالا محاسبه کنید.

در چند مثال بعد یک موضوعِ دیگری نیز تمرین می‌گردد و آن زاویهٔ جدایش از قطب و یا زاویهٔ فرود مکان به صفر است. برخی اوقات دانستن مقدار این زوایا کمک می‌کنند تا نحوهٔ حرکت مکان روشن‌تر شود و از ابهام خارج گردد.

مثال پ۲- ۴-

با توجه به شکل می‌خواهیم زاویه مکان را در خروج از قطب‌ها به دست آوریم و مکان را به صورت دقیق رسم کنیم.

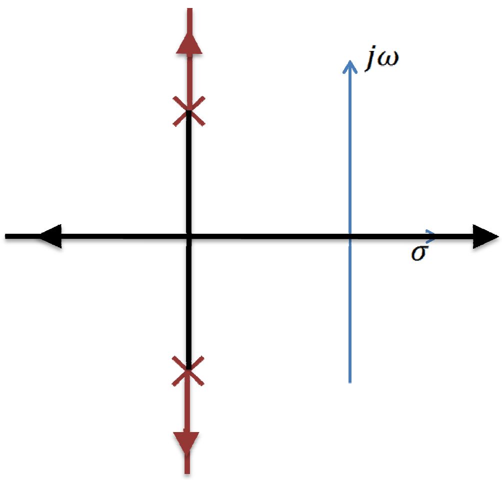


شکل پ۲- ۱۶ – تعیین زاویه خروج از قطب؛ مثال پ۲- ۴

برای این کار ابتدا مکان را تقریباً روی قطبِ مربوط فرض می‌کنیم. زاویهٔ خروج را مشابه آنچه در شکل نشان داده شده است، مجهول در نظر می‌گیریم و سپس با نوشتنِ شرط زاویه آن را به دست می‌آوریم.

$$-90-\theta=\begin{cases}-180 & \rightarrow \quad \theta_{k>0}=+90\\ 0 & \rightarrow \quad \theta_{k<0}=-90\end{cases} \qquad \text{(پ۲- ۳۲)}$$

و چون برای $k>0$ و $k<0$ ، هر یک، دو شاخهٔ بینهایت داریم، پس مکان به صورتی که در زیر آمده خواهد بود.



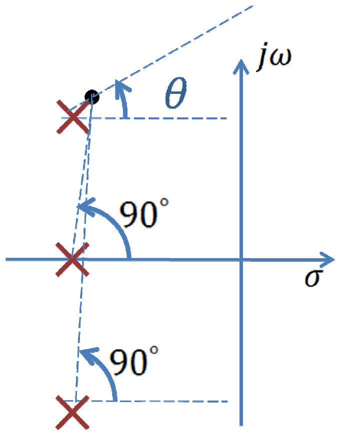
شکل پ۲- ۱۷ – مکان هندسی قطب‌های حلقه بسته در مثال پ۲- ۴؛ مکان با زاویه $90°$ از قطب خارج می‌شود.

تمرین پ۲- ۳-

نقطهٔ فرود به محور حقیقی را محاسبه کنید. (به نظر می‌رسد که باید -1 به‌دست‌آید!)

مثال پ۲- ۵-

زاویه خروج از قطب‌ها را برای ترکیب نشان داده شده در شکل به دست آورید و مکان را به صورت دقیق رسم کنید.

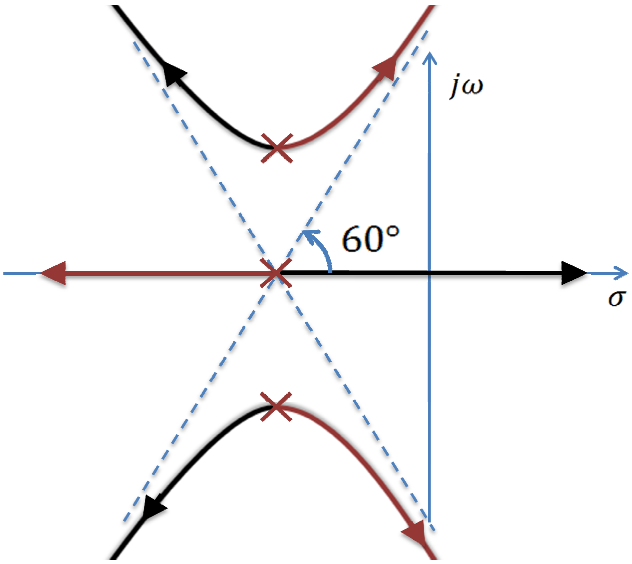


شکل پ۲- ۱۸ - تعیین زاویه خروج از قطب؛ مثال پ۲- ۵

این‌بار برای زاویهٔ خروج داریم:

$$-90-90-\theta=\begin{cases}-180 \rightarrow & \theta_{k>0}=0\\ 0 \quad \rightarrow & \theta_{k<0}=-180\end{cases} \qquad \text{(پ۲- ۳۳)}$$

در این مثال سه قطب بیش از صفر داریم، لذا برای علامت مثبت و منفیِ k، هر یک، سه شاخهٔ بینهایت داریم و در نهایت نتیجهٔ به شکل زیر خواهد بود:



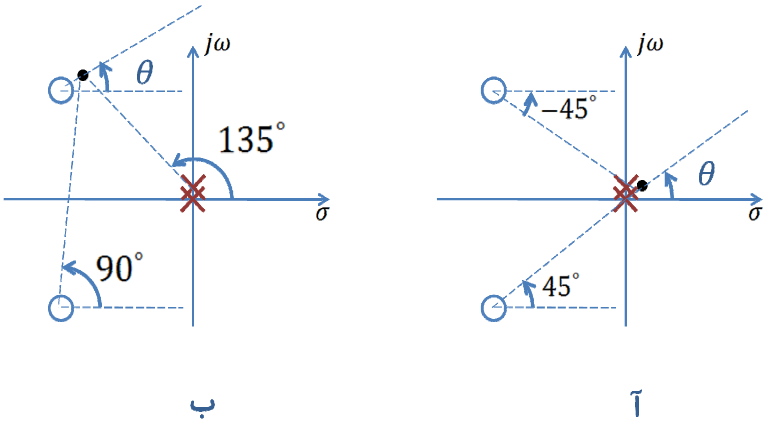
شکل پ۲- ۱۹ - مکان هندسی قطب‌های حلقه بسته درمثال پ۲- ۵

تمرین پ۲- ۴-

با استفاده از روش روث، در مثال پ۲- ۵ مرزهای ناپایداری را دقیقاً تعیین کنید و بهرهٔ نظیر را از هر دو راه به دست آورید.

مثال پ۲- ۶-

زاویه خروج از قطب‌ها و نیز زاویه ورود به صفرها را بـرای ترکیـب نشـان داده شـده در شکل به دست آورید و مکان را به صورت دقیق رسم کنید.



شکل پ۲– ۲۰- مکان هندسی قطب و صفرهای حلقه بسته مثال پ۲– ۶؛ شکلِ آ برای محاسبهٔ زاویهٔ خروج از قطب‌ها و شکل ب برای محاسبهٔ زاویهٔ فرود به صفرها رسم شده‌است.

محاسبات لازم برای تعیین این زوایا به این شکل است:

$$45 - 45 - 2\theta = \begin{cases} \pm 180 & \rightarrow \theta_{k>0} = \pm 90 \\ 0\,, 360 & \rightarrow \theta_{k<0} = 0\,, 180 \end{cases} \qquad (\text{پ۲– ۳۴})$$

$$90 - 2 \times 135 + \theta = \begin{cases} -180 & \rightarrow \theta_{k>0} = 0 \\ 0 & \rightarrow \theta_{k<0} = -180 \end{cases} \qquad (\text{پ۲– ۳۵})$$

در مثال پ۲– ۶ یک نکتهٔ ناگفته نیز وجود دارد که همین‌جا می‌آموزیم. نکته این است که اگر تعداد صفر و قطب‌ها برابر باشد، آنگاه مکان دو شاخهٔ بینهایتِ غیر منتظره دارد. چرا می‌گوییم غیر منتظره؟! چون با توجه به اینکه $\Delta n = 0$ منتظر بودیم هیچ شاخهٔ بینهایت رونده نداشته باشیم. این دو شاخهٔ غیر منتظره یک فرق اساسی با آن شاخه‌های منتظره دارد.

تفاوت این شاخه بینهایت در این است که شاخه‌های منتظره به ازای $|k| \rightarrow \infty$ به وجود می‌آیند درحالی که این دو شاخهٔ غیر منتظره فقط به ازایِ $k \rightarrow -1$ به وجود می‌آیند. در این

حالت وقتی k می‌خواهد از -1 عبور کند، پیش از آن اندازه مکـان قطـب در یـک شـاخه بـزرگ می‌شود و پس از آن فوراً به شاخهٔ مقابل می‌پرد و از اندازهٔ بسیار بزرگ شروع و کوچک می‌گردد.

در این مثال ابتدا با تغییرِ k از 0 به -1 ، مکان، از قطبِ در مبدأ به سمت راست می‌رود و با هر چه نزدیک شدنِ k به -1 ، مکان نیز به سمتِ $+\infty$ میل می‌کند. سپس وقتی k از -1 عبور کرد، مکان دفعتاً از $+\infty$ به $-\infty$ می‌پرد و سپس با ادامهٔ حرکتِ k مکـان نیـز روی محـور حقیقی به سمتِ راست حرکت می‌کند.

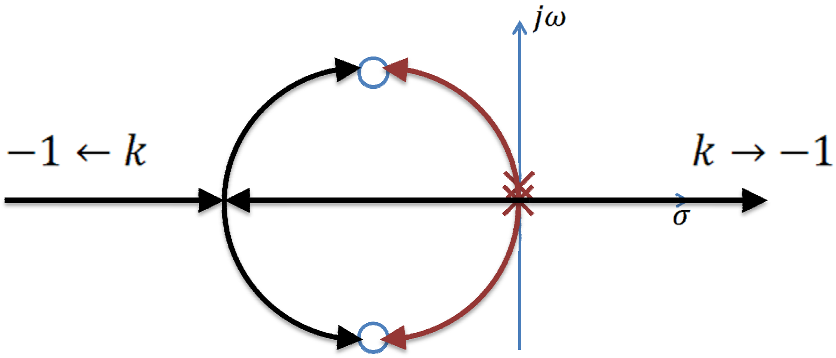
از طرف دیگر در حین همین تحول، مکان از سمت دیگر قطبی که در مبدأ بود، به سمتِ چپ در حال حرکت بوده است. این حرکت با مسیر دیگری که در بالا شرح دادیم، به هم می‌رسند، سپس از محور حقیقی جدا می‌شوند و هر یک به سمت یکی از صفرها حرکت می‌کنند، همان گونه که در شکل مشاهده می‌کنید.

نقطهٔ جدایش از محور حقیقی را نیز می‌توان از همان معادلهٔ (پ۲- ۱۶) که آموخته‌ایم، به شرح زیر محاسبه کنیم:

$$ND' - N'D = (s^2 + s + 1)(2s) - (2s + 1)(s^2) = \qquad \text{(پ۲- ۳۶)}$$

$$s(s + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad s_1 = 0 \ \ , \ \ s_2 = -2$$

که 0 همان مکانِ مکرر در مبدأ است و دیگری همان نقطه‌ای است که دنبالش بودیم.



شکل پ۲- ۲۱ – مکان هندسی قطب‌های حلقه بسته مثال پ۲- ۶

تمرین پ۲- ۵

در مثال پ۲- ۶ بهرهٔ مکان نظیرِ نقطهٔ جدایشِ -2 را بیابید.

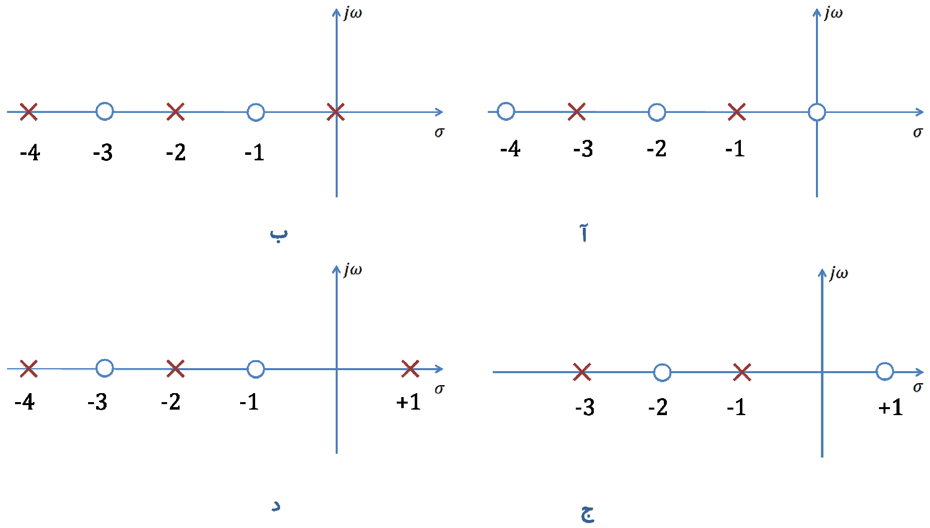
تمرین پ۲- ۶-

در همان مثال فرض کنید قطب‌های در مبدأ به جای ۲ تا، ۳ تاست و دوباره مسئله را کامل حل کنید.

تمرین پ۲- ۷-

ترکیب صفر و قطب $G(s)$ در شکل‌های زیر داده شده‌اند. مکان ریشه های $1 + kG(s)$ را به ازاء kهای مختلف رسم کنید(برای مقادیر مثبت و منفی). ضمناً تعداد ریشه

هایی که سمت چپ محور موهومی و سمت راست محور موهومی هستند را به ازاء مقادیر مختلف k دقیقاً بیان کنید.



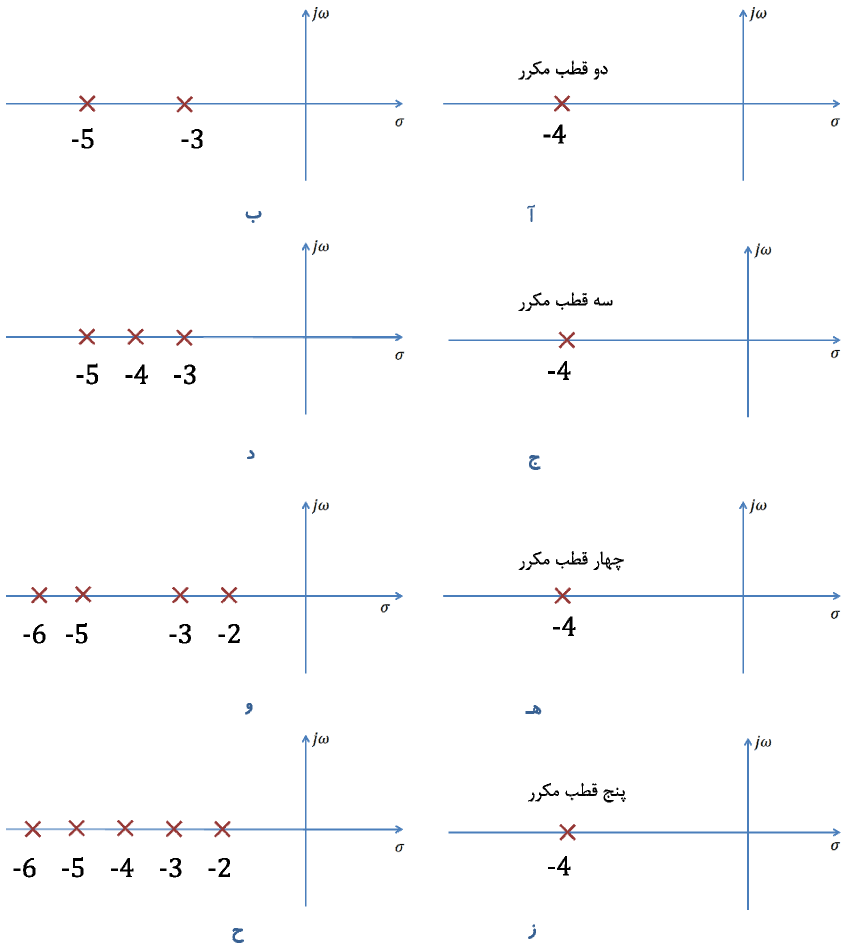
شکل پ۲– ۲۲ – ترکیب‌های قطب و صفر تمرین پ۲– ۷

تمرین پ۲– ۸–

فرض کنید در شکل پ۲–۲۲– ب یکی از ریشه های $1 + kG(s)$ بـه ۰/۹۹– رسـیده است. k و مابقی ریشه ها را به طور هندسی بیابید.

تمرین پ۲– ۹–

دقیقاً مشابه با تمرین پ۲- ۸ برای شکل‌های زیر عمل کنید و علاوه بر آن مقدار بهـره برای مرز ناپایداری در هر مورد را تعیین کنید.(برای تعیـین k مـی‌توانیـد از روش روث ـ هرویتـز استفاده نمایید).



شکل پ۲- ۲۳ – ترکیب‌های قطب و صفر تمرین پ۲-۹

تمرین پ۲- ۱۰-

مکان ریشه‌هایِ معادلهٔ مشخصه‌های زیر را به ازایِ مقادیر مختلـف مثبـتِ k بـه دقـت رسم کنید. زوایای خروج از قطب‌ها و ورود به صفرها را تعیین کنید.

$$1+k\frac{(s^2+36)}{s^2+16}$$ (پ۲- ۳۷)

$$1+k\frac{(s+2)(s^2+36)}{(s+4)(s^2+16)}$$ (پ۲- ۳۸)

$$1+k\frac{(s+2)(s^2+36)}{(s+4)(s^2+16)}$$ (پ۲- ۳۹)

$$1+k\frac{s^2+36}{s(s^2+16)}$$ (پ۲- ۴۰)

ستایش از آن خداوند است

مراجع

[1]. Evans, W R. "Graphiacl analysis of control system." (Trans. AIEE) 67 (1948): 547-551.

[2]. Kuo, B C, and F Golnaraghi. "Automatic Control Systems". 8nd Edition. Wiley, 2002.

با نام او

پیوست۳

نمایشِ قطبی، نایکوئیست و «بود» پاسخ فرکانسی و ارتباط بهرهٔ حلقه و نتیجهٔ حلقه در پایداری (معیار نایکوئیست برای پایداری)

چون رسم نمایش قطبیِ پاسخ فرکانسی مقدمه‌ای اجتناب‌ناپذیر در استفاده از آن در موضوع پایداری است، ناچار به موضوع رسمِ آن می‌پردازیم. همین طور چون رسمِ نمایشِ بودیِ پاسخ فرکانسی نیز مقدمه‌ای اجتناب‌ناپذیر در استفاده از آن در طراحی است، به موضوع رسمِ این نمایش نیز می‌پردازیم. خوشبختانه مفاهیمِ اصلی در این دو نمایش کاملاً یکسان است و فقط در رسم تفاوت دارند.

لذا این پیوست شامل دو قسمت اساسی است: یکی رسمِ پاسخ فرکانسی به هر دو روشِ قطبی (نایکوئست) و بودی (لگاریتمی) و دیگری موضوعِ تعیین پایداریِ حلقه از رویِ نایکوئیستِ بهرهٔ حلقه.

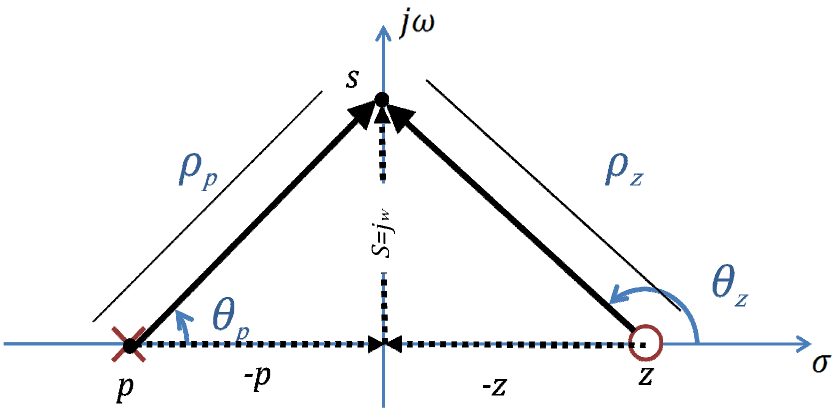
رسمِ پاسخ فرکانسیِ تابع تبدیل‌های خطی ـ کسری

کافیست توجه کنید که صورت و مخرج تابع تبدیل را می‌توان به صفر و قطب‌هایِ سادهٔ حقیقی و یا مختلط مزدوج تجزیه نمود. به این ترتیب اگر پاسخ فرکانسی را برای یک صفر یا قطبِ سادهٔ حقیقی و برای یک زوج صفر یا قطب مختلط مزدوج، به خوبی به دست آوریم و با این

کار و نتیجه آن آشنا شویم، امید است که برای هر تابع تبدیل دلخواه ـ که ترکیبی از این صفر و قطب‌هاست ـ نیز (مانند آنچه در زیر آمده است) به راحتی کار را پیش ببریم.

$$G(s) = k\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} \qquad \text{(پ۳- ۱)}$$

ابتدا توجه کنید که به لحاظ ریاضی به دست آوردنِ پاسخ فرکانسیِ یک تابع تبدیل یعنی محاسبهٔ عدد مختلطِ حاصل از جایگذاری $j\omega$ به جایِ s. شیوه‌های گوناگون برای نمایش این عدد مختلط نیز نمایش‌های گوناگونِ پاسخ فرکانسی را موجب می‌شود. نتیجهٔ این جایگذاری برای یکی از این صفرها یا قطب‌ها برداری است که از آن صفر یا قطب به محور موهومیِ نشانگرِ آن فرکانس رسم می‌گردد. این موضوع در شکل پ ۳– ۱ برای یک صفرِ سمت راست و یک قطبِ سمت چپ، نشان داده شده است.



شکل پ ۳- ۱- هر صفر یا قطب در پاسخ فرکانسی به صورت یک بردار است که از آن صفر و قطب شروع و تا نقطه نشانگر هر فرکانس بر روی محور موهومی کشیده می‌شود.

لذا حاصلِ G در هر فرکانس می‌شود، حاصل‌ضربِ تمامیِ این بردارهایِ صفر تقسیم بـر حاصل‌ضرب تمامیِ بردارهایِ قطب! به این ترتیب برای اندازه و فازِ G داریم:

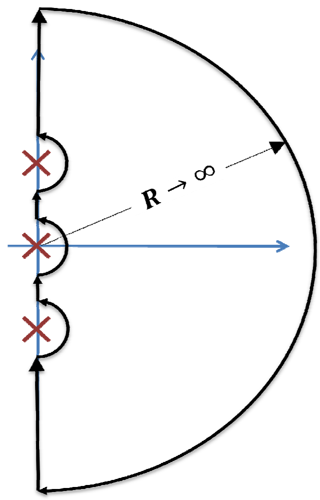
$$\measuredangle G = \sum_{j=1}^{m} \theta_z(j) - \sum_{i=1}^{n} \theta_p(i) \; + \begin{cases} 0^\circ & k > 0 \\ -180^\circ & k < 0 \end{cases} \qquad \text{(پ۳- ۲)}$$

$$|G| = |k| \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m} \rho_z(j)}{\prod_{i=1}^{n} \rho_p(i)} \;\; \rightarrow \;\; 20\, log|G| = 20\, log\, |k| + 20 \sum_{j=1}^{m} log\, \rho_z(j) - 20 \sum_{i=1}^{n} log\, \rho_p(i) \qquad \text{(پ۳- ۳)}$$

اگر اندازه و فازِ این عدد مختلط (G)، جداگانه بر حسب فرکانس، زیرِ هم، رسم و محـور فرکانس، لگاریتمی در نظر گرفته شود و نیز به جای اندازه، ۲۰ برابر لگاریتم آن رسم گردد، نمایشِ بودی به دست می‌آید. مزیتِ این گزینش‌ها را جلوتر خواهید دید.

اگر همین اندازه و فاز را که نمایش قطبیِ آن عدد مختلط است، در صفحهٔ مختلط به ازایِ فرکانس‌های مختلف از 0 تا ∞ به دست آوریم، معمولاً یک منحنیِ به هم پیوسته‌ای به وجود می‌آید که همان نمایشِ قطبیِ پاسخ فرکانسی است. در این نمایش، فرکانس حذف شده است و بر خلاف نمایشِ بودی، معلوم نیست هر نقطه از شکل، حاصلِ کدام فرکانس است. در این منحنی فقط با یک پیکان، روند افزایشیِ فرکانس معلوم می‌گردد. تعبیرِ هندسیِ این عملیات یعنی نیم خطِ جهت‌دارِ قسمتِ مثبتِ محور موهومی در صفحهٔ s، تحت تبدیلِ $G(s)$، که همان تابع تبدیلِ مورد مطالعه است، به منحنیِ دیگری در صفحهٔ G مبدل شده است.

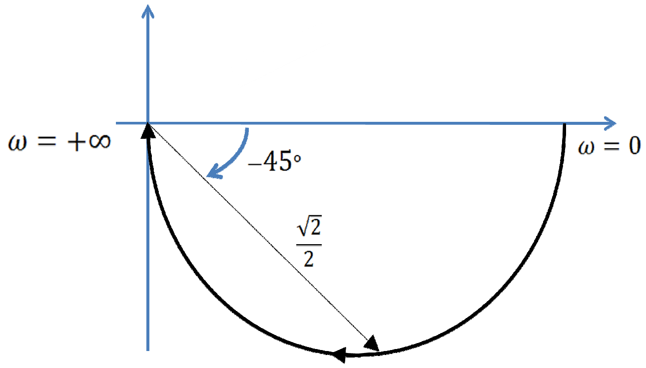
اگر همین تبدیل را برای همهٔ محور موهومی از $-\infty$ تا 0 و از 0 تا $+\infty$ انجام دهیم و همین طور با نیم‌دایره‌ای با شعاعِ ∞ در سمتِ راستِ محور، دوباره از $+\infty$ دور زده و به $-\infty$ برگردیم (به شکل پ ۳- ۲ نگاه کنید)، منحنیِ کاملتری به دست می‌آید که آن را نمایش نایکوئیست گویند. اگر تابع تبدیلِ G، قطب یا قطب‌هایی روی محور موهومی داشته باشد، این تبدیل در نقاط متناظر با قطب تعریف نشده است و به بی‌نهایت میل می‌کند. برای اینکه منحنیِ مربوطه بریده نشود و پیوسته باقی بماند، به جای آنکه کاملاً از روی قطب‌ها بگذریم، به نوعی از کنار آنها عبور می‌کنیم. این کار در شکل پ ۳- ۲ نشان داده شده است. این عبور به صورت یک نیم‌دایره از سمتِ راست قطب است به گونه‌ای که این قطب، درونِ منحنیِ بسته‌ای که همهٔ سمتِ راست محور موهومی را شامل می‌گردد، قلمداد نخواهد شد (به شکل توجه کنید). روشن است که در چنین مواردی منحنی تبدیل‌یافته در فضای G در هنگام عبور از کنار این قطب، دارایِ شعاع بی‌نهایت است و فقط فاز آن تغییر می‌کند. این تغییر فاز باعث چرخشِ نیم دایره‌ایِ منحنیِ تبدیل‌یافته خواهد شد.



شکل پ ۳- ۲- نمایش نایکوئیست تبدیل یافته این منحنی است که تحت تابع تبدیل G به دست می آید. ملاحظه می شود که این منحنی شامل محور موهومی و نیم دایره سمت راستی به شعاع بینهایت است. همچنین به جای عبور از روی قطب های روی محور منحنی از کنار آنها می گذرد.

مثال پ۳- ۱-

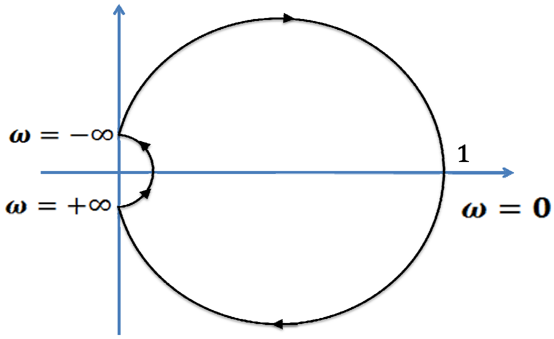
نمایش قطبی و نایکوئیست تابع تبدیلِ مرتبهٔ اول پایدارِ $\frac{2}{s+2}$ را رسم می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که در اینجا فقط یک بردار مشابه آنچه در سمتِ چپِ شکل پ ۳- ۳ آمده‌است در مخرج داریم. اندازهٔ این بردار در فرکانس صفر، کمترین مقدار است و با افزایش فرکانس بزرگ می‌شود. لذا اندازهٔ تابع تبدیل مرتباً در حال کاهش خواهد بود. اما فازِ این بردار از صفر شروع می‌شود و به $90°$ میل می‌کند. چون این بردار در مخرج است، فازِ تابع تبدیل از 0 مرتباً رو به کاهش خواهد بود و به $-90°$ میل خواهد نمود. به این ترتیب با افزایش فرکانس اندازه کاهش می‌یابد، فاز نیز منفی می‌شود و درحالی که اندازه به سمت صفر می‌رود، فاز به $-90°$ میل می‌کند. این تحلیل شکل پ ۳- ۳ را برای نمایش قطبی به دست می‌دهد.



شکل پ ۳– ۳– نمایش قطبی تابع تبدیل $\frac{2}{s+2}$، بردار رسم شده تابع تبدیل را در فرکانس ۲ نشان می دهد: $\boldsymbol{\omega = 2 \rightarrow G = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -45°}$

پس نیم‌خطِ مثبتِ محور موهومی تحتِ تابع تبدیل $\frac{2}{s+2}$ به این نیم‌دایره تبدیل می‌شود. برای نایکوئیست، کافیست توجه کنید که همواره تبدیل‌یافتۀ نیم‌خطِ منفی مشابهِ نیم‌خطِ مثبت است و قرینۀ آن نسبت به محور حقیقی! می‌شود. یعنی در این مثال برای تکمیل منحنی نایکوئیست باید نیم‌دایرۀ بالایِ شکل پ۳–۳ نیز رسم شود.

اما تبدیل‌یافتۀ آن نیم‌دایرۀ شعاعِ بینهایت ـ با توجه به اینکه با بی‌نهایت شدن بردار همواره اندازۀ مخرج بی‌نهایت و اندازه تابع تبدیل صفرمی‌ماند ـ مبدأ است. البته اگر بخواهید دقتِ فوق‌العاده داشته باشید، باید گفت که هرچند اندازه صفر است، ولی فاز یک تحولِ 0 تا $+180°$ خواهد داشت. این یعنی منحنی تبدیل یافته حولِ مبدأ یک نیم‌دایره دور می‌زند. به طوری که فاز آن که در فرکانس $+\infty$، $-90°$ است به سمتِ فازِ صفر می‌رود و سپس در فرکانسِ $-\infty$ به فازِ $+90°$ می‌رسد. نتیجۀ این سخنان در شکل پ ۳– ۴ بزرگ‌نمایی شده است.



شکل پ ۳- ۴- نمایش نایکوئیست تابع تبدیل $\frac{2}{s+2}$؛ نیم دایره کوچک حول مبدأ در واقع نیم دایره ای به شعاع صفر است که از تبدیل نیم دایره بینهایت در صفحه s حاصل شده است. برای مشاهده بهتر، این نیم دایره بزرگنمایی شده است.

یادآوری می‌گردد که شکل پ ۳- ۴، تبدیل‌یافتهٔ منحنیِ بستهٔ نشان داده شده در شکل پ ۳- ۲ است، تحت تبدیلِ $\frac{2}{s+2}$.

باید یادآور شویم که دقت فوق‌العاده‌ای که در این مثال برای یافتنِ تبدیل‌یافتهٔ نیم‌دایرهٔ بزرگ انجام دادیم، در اغلب موارد لزومی ندارد و همین که بدانیم حاصل یک نقطه در مبدأ است، کفایت می‌کند.

آنچه در این مثال مشاهده شد را می‌توان به صورت یک قاعده کلی بیان کرد: اگر تابع تبدیل اکیداً سره باشد، (یعنی درجهٔ مخرج آن حتماً بیشتر از درجه صورت باشد) آنگاه تبدیل‌یافتهٔ نیم‌دایرهٔ بزرگ به شعاع بی‌نهایت چیزی نخواهد بود جز مبدأ. اگر لازم باشد تا چگونگیِ دور زدن‌های در مبدأ (یعنی چگونگی تغییر فاز) را نیز بدانیم باید توجه کنیم که هر تعدادی که قطب‌ها از صفرها بیشترند، در مبدأ نیم‌دایره‌ای در خلاف جهت ساعت وجود خواهد داشت، یعنی فاز $180°$ تغییر می‌کند. ضمناً هنگامی که تابع تبدیل سره باشد نیز تبدیل یافتهٔ دایره بزرگ، به جای مبدأ

نقطه‌ای خواهد بود که جای آن را این بار بهرهٔ پرش تعیین می‌کند. در این حالت به لحاظ فاز نیز هیچ تغییری نداریم و لذا منحنی هم آن نقطه را دور نخواهد شد.

همان طور که در ابتدای بحث گفته شد برای رسم نمایش بودی لازم است محورهای فرکانس و اندازه به صورت لگاریتمی مدرج شوند. تابع لگاریتم، با تبدیل حاصل‌ضرب به حاصل‌جمع کار محاسبه را بسیار ساده می‌کند. این موضوع در عبارتی که ابتدای این پیوست آمد روشن است.

برای سادگیِ کار محاسبه و رسم اندازه، هر عبارتِ مربوط به قطب را به صورت $\frac{-p}{s-p}$ می‌گیریم و نه به صورت $\frac{1}{s-p}$!!! و هر عبارت صفر را نیز به صورت $\frac{s-z}{-z}$ در نظر می‌گیریم و نه به صورتِ $\frac{s-z}{1}$. یعنی بهرهٔ ثابتِ همه عوامل را واحد می‌گیریم. این کار یک خاصیت محاسباتیِ ساده‌کننده دارد و آن این است که همهٔ آن عوامل در فرکانس‌هایِ پایین دارایِ اندازهٔ واحد خواهند بود و در نتیجه لگاریتمِ اندازه آنها صفر است. لذا هنگام جمع کردن وقتی از فرکانس‌های پایین، کارِ محاسبه را شروع می‌کنیم، این عوامل اثری ندارند تا جایی که آرام آرام به فرکانس‌هایی برسیم که هر یک مؤثر می‌شوند. خواهیم دید که هر یک از عوامل دقیقاً در فرکانسِ اصلیِ خود یعنی همان جای قطب و یا صفر مؤثر می‌شوند و تا قبل از آن اثر قابل توجهی در اندازه ندارند.

$$20\,log\,\frac{p}{\sqrt{\omega^2+p^2}} = 20\,log\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{p}\right)^2+1}} = 0 - 20\,log\,\sqrt{\left(\frac{\omega}{p}\right)^2+1} \qquad \text{(پ۳- ۴)}$$

حال دقت کنید که در فرکانس‌هـایی کـه $\omega \ll p$ $(\frac{\omega}{p} \ll 1)$ لگـاریتمِ انـدازه، تقریبـاً همچنان $0\ dB$ [1] است. تا اینکه در فرکانس اصلی یعنی $\omega = p$ دقیقاً داریم:

$$20\ log|H| = -20\ log\sqrt{2} \cong -3\ dB \qquad \text{(پ۳- ۵)}$$

و اما در فرکانس‌های بسیار بزرگتر از فرکانس اصلی یعنی $\omega \gg p$ $(\frac{\omega}{p} \gg 1)$، خواهیم داشت:

$$20\ log|H| \cong -20\ log\frac{\omega}{p} \qquad \text{(پ۳- ۶)}$$

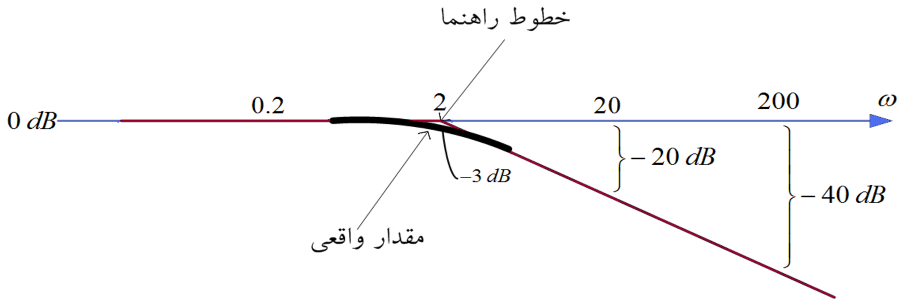
به این ترتیب اگر محور فرکانس را نیز بر حسبِ $log\ \omega$ مدرج کنیم (لگاریتمی بگیریم)، تغییرات لگاریتم اندازه خطی خواهد بود و می‌توان آن را با خطوط راست رسم نمود. ایـن خطـوط راست را در نمایش بودی خطوط راهنما می‌نامند. تعبیر هندسی این خط راهنمـا نیـز بسـیار سـاده است. مثلاً می‌توان گفت به ازایِ هر ده برابـر شـدنِ فرکـانس از فرکـانس اصـلی، $20\ dB$ افـت خواهیم داشت یا شیبِ نمایش بود $-20\frac{dB}{decade}$ است.

مثال پ۳- ۲-

نمایش بودی برای اندازه تابع تبدیل $\frac{2}{s+2}$ در شکل پ ۳- ۵ آمده است.

---

[1] واحدِ ۲۰ برابرِ لگاریتمِ اندازه، به دلایل تاریخی نامِ دسی‌بِل گرفته است



شکل پ ۳– ۵– نمایش بودی اندازه تابع تبدیل $\frac{2}{s+2}$

این نمودار برای تابع تبدیلی با یک قطب به دست آمد. برای توابع تبدیل با یـک صـفر، فقط کافیست به جای شیبِ منفی، شیبِ مثبت در نظر بگیرید. یعنی شیب خطوط راهنما به جـایِ $-20\frac{dB}{decade}$ ، $+20\frac{dB}{decade}$ خواهد شد.

حال برای رسم نمودار تغییرات فاز در نمایش بودی تابع تبدیل تک قطبی $\frac{2}{s+2}$ داریم:

$$\measuredangle G = -\tan^{-1}\frac{\omega}{2} \tag{پ۳– ۷}$$

برای اینکه درک کنیم، رسم کردن فاز برحسب محور لگاریتمی فرکانس، چه خوبی دارد، باید رابطهٔ بینِ $u = \log x$ و $v = \tan^{-1} x$ را بررسی کنیم:

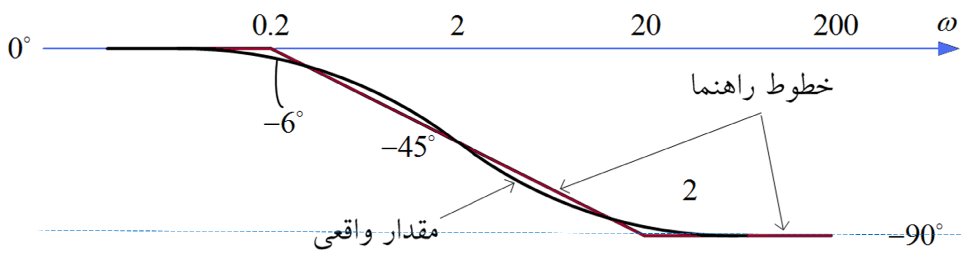
$$\tan v = x = 10^{u} \rightarrow u = \log(\tan v) = \log(\sin v) - \log(\cos v) \tag{پ۳– ۸}$$

حال اگر عبارت بالا را حول $v = \frac{\pi}{4}$ ملاحظه کنیم، می‌بینیم که در $tan\, v$ و u نسبت به این نقطه تقارن وجود دارد. برای دیدنِ این موضوع، کافیست در نظر بگیرید:

$$w = v - \frac{\pi}{4} \qquad \text{(پ۳- ۹)}$$

$$u = log\left(sin\left(\frac{\pi}{4} + w\right)\right) - log\left(sin\left(\frac{\pi}{4} - w\right)\right) \qquad \text{(پ۳- ۱۰)}$$

کاملاً روشن است که حولِ جایی که فاز $\pm 45°$ می‌شود، تقارن وجود دارد. شکل پ ۳-۶ نتیجهٔ این سخنان را نشان داده است.



شکل پ ۳- ۶- نمایش بودی فاز تابع تبدیل $\frac{2}{s+2}$؛ منحنی $\measuredangle G = -tan^{-1}\frac{\omega}{2}$ که بر روی محور لگاریتمی فرکانس رسم شده است،حول نقطه $-45°$ تقارن دارد.

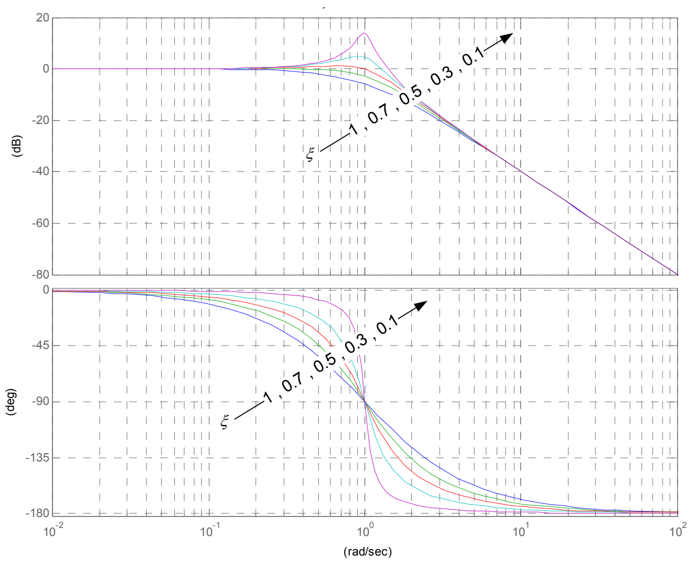
آنچه در محاسبه‌ها و ترسیم‌های بالا برای تک قطب آمد، برای صفرها نیز کاملاً کـاربرد دارد. چراکه فقط کافی است هر آنچه را به دست آورده‌اید، در یک منفی ضرب کنید.

حتی برای صفر و قطب‌های مختلط مزدوج نیز همهٔ مـوارد مربـوط بـه تقـارن و ابتـدا و انتهایِ فاز درست است و خطوط راهنما نیز قابل استفاده‌اند (البته چون در این حالت دو قطب و یا

دو صفر وجود دارد همه چیز ـ شیب و مقدار تغییر زاویه ـ دو برابر می‌شود). تنها فرقی کـه گـاهی خود را به طور جدی نشان می‌دهد در ناحیهٔ نزدیک به فرکانس اصلی است. این تفاوت از ضـریب میراییِ نوسانِ مربوط به مزدوج‌ها ناشی می‌شود. اگر این ضریب میرایی کمتر از 0.5 شود، فاصـلهٔ مقدار واقعی از خطوط راهنما در حول و حوش فرکانس اصلیِ ω_n، بیشتر می‌گردد.

مثال پ۳- ۳-

برای دید پیدا کردن نسبت به فاصله بین خطوط راهنما و منحنی واقعی در توابع تبدیل با قطب های مختلط مزدوج نمودار بود برای چندین ضریب میرایی رسم شده است. در شکل پ ۳- ۷ نتایج این کار را می‌بینید.

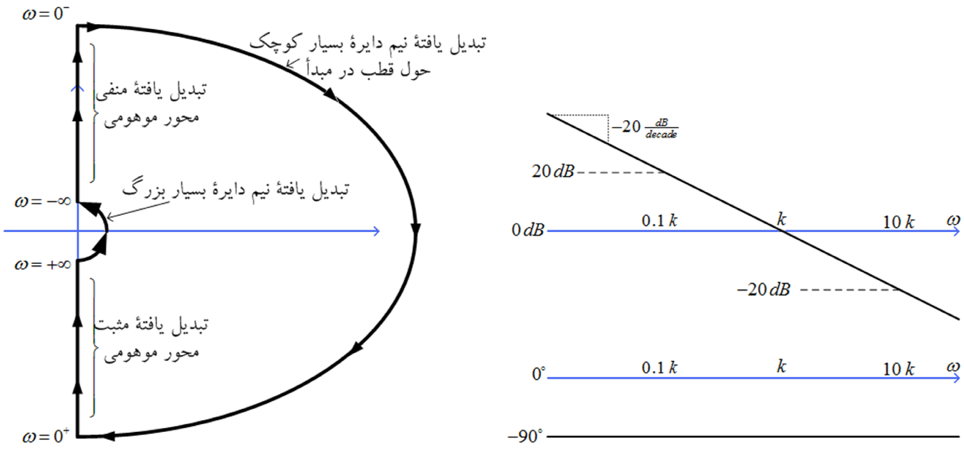


شکل پ ۳- ۷- نمایش بودی تابع تبدیل $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ به ازای مقادیر مختلف ξ

ملاحظه کنید که با کم شدنِ ξ، اندازه ابتدا به خطوط راهنما نزدیک و سپس دور می‌شود ولی فاز از همان ابتدا از خطوط راهنما فاصله می‌گیرد. به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که خطوط راهنما به غیر از مواقعی که با زوج صفرها یا قطب‌های مختلط با ضریب نوسانیِ کوچک (یعنی تشدید بالا) مواجهیم، راهنمای دقیقی برای رسم و محاسبه‌اند.

مثال پ۳- ۴-

در این مثال جمعگر خالص $k > 0$ $\frac{k}{s}$ را که قطبی روی محور موهومی دارد، در نظر می‌گیریم. کاملاً روشن است که از همان فرکانس‌های بسیار پایین فاز $-90°$ است و تا آخر نیز چنین است. اندازه در فرکانس‌های نزدیکِ صفر، ابتدا بسیار بزرگ و بی‌نهایت است ولی لگاریتمِ اندازه از همان ابتدا، با شیبِ $-20\frac{dB}{decade}$ در حال کاهش است. نمایش قطبی، نایکوئیست و بودی در شکل پ ۳- ۸ نشان داده شده‌اند.



ب آ

شکل پ ۳- ۸- آ. نمایش بودی و ب. نمایش نایکوئیست برای تابع تبدیل جمعگر خالص

یادآور می‌شود که در نمایش قطبی به تبدیل‌یافتهٔ قسمت مثبت محور موهومی اکتفا می‌گردد و معمولاً توقع می‌رود بتوان از روی آن بقیهٔ نایکوئیست را حدس زد.

با مقدمات و مثال‌هایی که در رابطه با چگونگی رسم نمودارهای بود و نایکوئیست بیان داشتیم می توانیم در اینجا جمع بندی‌ای را برای آنها ارائه دهیم.

در ادامه هرگاه می‌گوییم «شروع» منظور، محدودهٔ فرکانسی از صفر تا قبل از کوچکترین فرکانس اصلی موجود در سامانه است و وقتی می‌گوییم «پایان» منظور محدودهٔ فرکانس‌هایی است که به اندازهٔ کافی بزرگتر از بزرگترین فرکانس‌های اصلیِ موجود در سامانه شده‌اند، تا ∞.

ما در رسمِ پاسخ فرکانسی تابع تبدیل را بر حسب بهرهٔ ثابت مرتب می‌کنیم و به صورت زیر می‌بینیم:

$$G(s) = \frac{k}{s^l} \cdot \frac{\left(\frac{s}{-z_1}+1\right)\left(\frac{s}{-z_2}+1\right)\ldots\left(\frac{s}{-z_m}+1\right)}{\left(\frac{s}{-p_1}+1\right)\left(\frac{s}{-p_2}+1\right)\ldots\left(\frac{s}{-p_n}+1\right)} \qquad \text{(پ۳- ۱۱)}$$

- بررسی مقدار فاز تابع تبدیل در فرکانس‌های شروع (شروعِ فاز)
- در شروع، به اندازه $l \times 90°$ تأخیر فاز داریم، یعنی به این مقدار فازِ منفی وجود دارد. به عبارت دیگر به ازای هر قطب در مبدأ فاز شروع یک تأخیرِ $90°$ دارد.
- اگر بهرهٔ پرش منفی باشد نیز $-180°$ به فاز اضافه می‌گردد. یعنی بهرهٔ پرشِ منفی به معنیِ یک تأخیرِ فازِ $180°$ است.
- به تعدادی که قطب‌های ناپایدار از صفرهای ناپایدار بیشتر باشد، در شروعِ فاز باید یک تأخیرِ $180°$ لحاظ گردد. مثلاً اگر فقط یک قطب ناپایدار داریم و صفر ناپایداری نداریم، باید به فازِ شروع، یک $-180°$ اضافه گردد. اگر بر عکس باشد باید یک فازِ $180°$ اضافه گردد.
- بررسی مقدار اندازه تابع تبدیل در فرکانس‌های شروع (شروعِ اندازه)
- اما اگر به تعدادِ l تا قطب در مبدأ باشد، اندازه نیز از بی‌نهایتِ مرتبهٔ l شروع می‌شود و در «بود» با شیبِ $l \times 20\frac{dB}{decade}$ شروع به کاهش می‌کند. این خطِ نزول به گونه‌ای است که محور $0\,dB$ را در فرکانسِ $\sqrt[l]{k}$ قطع کند. به این ترتیب اگر هیچ قطبی در مبدأ نباشد، اندازه، از قدر مطلقِ بهرهٔ ثابت و یا در «بود» از $20\,log$|بهرهٔ ثابت| شروع می‌گردد. این موضوع در رسمِ بود، بسیار مهم است اما در رسم نایکوئیست چندان کاربردی ندارد.
- بررسی مقدار فاز تابع تبدیل در فرکانس‌های پایان (پایانِ فاز)

- فاز در پایان، به تعداد قطب‌هایی که از صفرها بیشترند، تأخیرِ فازِ $90°$ خواهد داشت. یا به عبارت دیگر، فاز به $-90°(n+l-m)$ میل خواهد نمود. البته اگر بهرهٔ پرش منفی باشد، کلاً یک تأخیر فازِ $180°$ نیز باید لحاظ گردد و لذا این فاز به مقدار $-90°(n+l-m)-180°$ میل خواهد نمود.
- در نایکوئیست نیز، نیم‌دایرهٔ ∞ به همین تعداد به نیم‌دایرهٔ ϵ در خلاف جهت عقربه‌ها تبدیل می‌گردد. لذا اگر تعداد صفر و قطب‌ها برابر باشند، فقط یک نقطه، در بهرهٔ پرش خواهیم داشت.
- بررسی مقدار اندازه تابع تبدیل در فرکانس‌های پایان (پایانِ اندازه)
- اندازه به تعداد قطب‌هایی که از صفرها بیشترند، با شیبِ نزولِ $-20\frac{dB}{decade}$ به سمتِ صفر میل خواهد کرد. اگر احیاناً تعداد صفر و قطب‌ها برابر باشد، آنگاه اندازه به بهرهٔ پرش میل خواهد نمود.
- بررسی مقدار فاز تابع تبدیل در فرکانس‌های بین شروع و پایان (رخدادِ فاز از شروع تا پایان)
- به ازای هر قطب سمتِ چپ یا صفر سمت راست، در فاصله حدودِ $\frac{1}{10}$ تا 10 برابرِ فرکانسِ آن قطب یا صفر، کلاً به اندازهٔ $90°$ کاهشِ فاز خواهیم داشت یعنی تأخیر فازِ $90°$ اضافه خواهد شد.
- برعکس به ازای هر قطب سمت راست و یا صفر سمت چپ، در فاصله حدودِ $\frac{1}{10}$ تا 10 برابرِ فرکانسِ آن قطب یا صفر، کلاً به اندازهٔ $90°$ افزایشِ فاز خواهیم داشت یعنی تقدمِ فازِ $90°$ اضافه خواهد شد.

- به ازای هر قطب روی محور موهومی، فاز یک کاهشِ $180°$ خواهد داشت. در نایکوئیست این کاهش فاز به لحاظ هندسی به صورت یک نیم‌دایرهٔ در جهت عقربه‌های ساعت نشان داده می‌شود.
- بررسی مقدار اندازه تابع تبدیل در فرکانس‌های بین شروع و پایان (رخدادِ اندازه از شروع تا پایان)
- شیبِ اندازه، در فرکانس اصلی مربوط به هر قطب $-20\frac{dB}{decade}$ و در هر صفر $+20\frac{dB}{decade}$، کم یا اضافه خواهد شد.
- به ازای هر قطب روی محور موهومی، اندازه به بی‌نهایت میل خواهد نمود و چون همان گونه که در بالا گفته شد، فاز نیز یک نیم‌دایرهٔ در جهت عقربه‌ها را دارد، پس با هر قطب موهومی نیم‌دایره‌ای به شعاع بی‌نهایت زده خواهد شد.

مثال پ۳- ۵-

برای نمایش تابع تبدیل زیر به صورت نایکوئیست و بود:

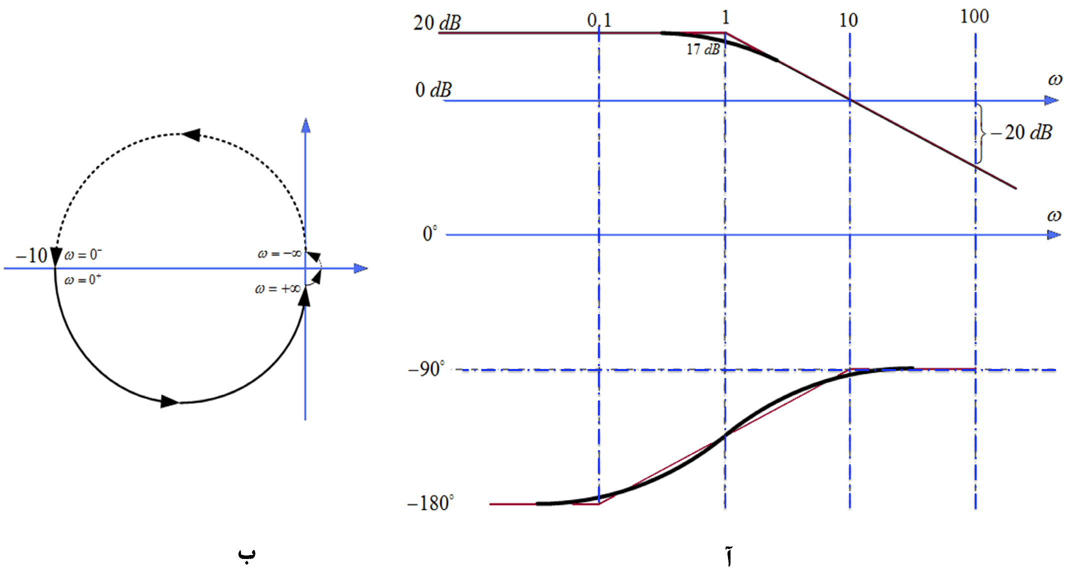
$$H(s) = \frac{10}{s-1} \qquad \text{(پ۳- ۱۲)}$$

فاز به دلیل یک قطبِ ناپایدار از $-180°$ شروع می شود. سپس به همین دلیل، یک افزایشِ $90°$یی را خواهد داشت که از حدود فرکانسِ $\frac{1}{10}$ شروع می‌شود و تا حدود فرکانسِ 10 ادامه دارد. در پایان نیز به دلیل وجود فقط یک قطب و نبود صفر و نیز بهرهٔ پرش مثبت، به $-90°$ میل خواهد نمود.

اندازه نیز از قدر مطلق بهرهٔ ثابت یعنی 10، یا در «بـود» از $20dB$ شـروع مـی‌گـردد. سپس به دلیل قطب موجود در 1، از همین فرکانس به بعد نزولی با شیبِ $-20\frac{dB}{decade}$ را تجربه خواهد نمود.

این تعابیر در نایکوئیست با میل نمودن منحنی به مبدأ بـا فـاز $-90°$ (میـل نمـودنِ از پایین به صورتی که مماس بر منفیِ محور موهومی در مبدأ می‌گردد) نشان داده می‌شود!

دایرهٔ بسیار بزرگ نیز به دلیل یکی بیشتر بودنِ تعدادِ قطب‌ها از صفرها، به یک نیم‌دایرهٔ بسیار کوچک در مبدأ، خلاف جهت عقربه‌ها تبدیل می‌گـردد. در شـکل پ ۳- ۹ هـر دو نمـایش نایکوئیست و بود، برای این تابع تبدیل رسم شده‌اند.



شکل پ ۳- ۹- آ. نمایش بودی و ب. نمایش نایکوئیست تابع تبدیل $\frac{10}{s-1}$ (مثال پ۳- ۵)

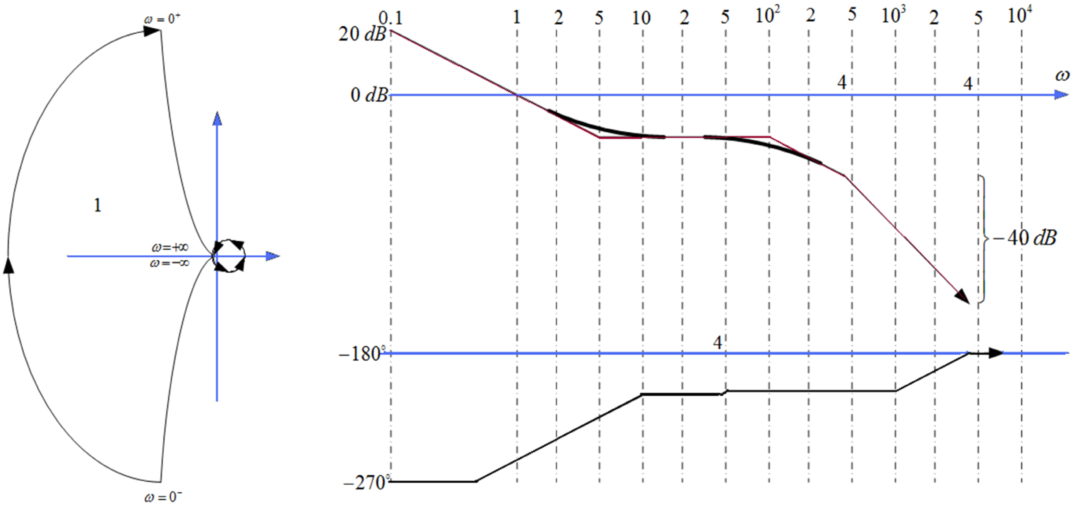
مثال پ۳- ۶-

برای نمایش تابع تبدیل زیر به صورت نایکوئیست و بود:

$$H(s) = \frac{8000(s+5)}{s(s+100)(s-400)} \qquad (پ۳- ۱۳)$$

به دلیل یک قطب در مبدأ یک تأخیر فازِ $90°$ و به دلیل یک قطبِ سادهٔ ناپایدار نیز یک تأخیر $180°$ در شروع فاز داریم. به این ترتیب فاز از $-270°$ شروع خواهد شد. از فرکانس $\frac{5}{10}$ تا 50 منحنی فاز یک افزایشِ $90°$ و از فرکانسِ 10 تا 1000 نیز کاهش $90°$ را خواهد داشت، لذا افزایش در فرکانس 10 متوقف و از فرکانسِ 50 کاهشِ مذکور آغاز می‌گردد. اما در عین حال از فرکانس 40 دوباره یک افزایش آغاز می‌شود و به گونه‌ای تا فرکانس 4000 ادامه می‌یابد که نهایتاً فاز به دلیل اختلافِ دوتایی قطب و صفرها، به $-180° = -2(90°)$ پایان پذیرد. نتیجهٔ همهٔ این تحلیل‌ها در شکل پ ۳- ۱۰ آورده شده است.

اما اندازه از ∞ با شیبِ نزولِ $-20\frac{db}{deacad}$ شروع می‌گردد به طوری که در فرکانسِ $1\frac{rad}{s}$، محور $0\ dB$ را قطع کند. این شیب تا فرکانسِ 5 ادامه پیدا می‌کند. در این فرکانس با اضافه شدن $+20\frac{dB}{decade}$ به شیب منحنی، شیبِ منفی قبلی به شیبِ صفر تبدیل می‌گردد. در فرکانسِ 100 و فرکانسِ 400 در دو مرحله، شیبِ منفی به شیب نمودار اضافه می‌شود. یعنی، در پایان با شیبِ $-40\frac{dB}{decade}$ سقوط ادامه دارد. شکل پ ۳- ۱۰ را ملاحظه کنید.



ب آ

شکل پ ۳- ۱۰- آ. نمایش بودی و ب. نمایش نایکوئیست تابع تبدیل ($\frac{8000(s+5)}{s(s+100)(s-400)}$)

مثال پ۳- ۶)

تمرین پ۳- ۱-

نمایش بودیِ تابع تبدیل $\frac{10(10s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)}$ را رسم کنید.

مثال پ۳- ۷-

برای نمایش تابع تبدیل زیر به صورت نایکوئیست و بود:

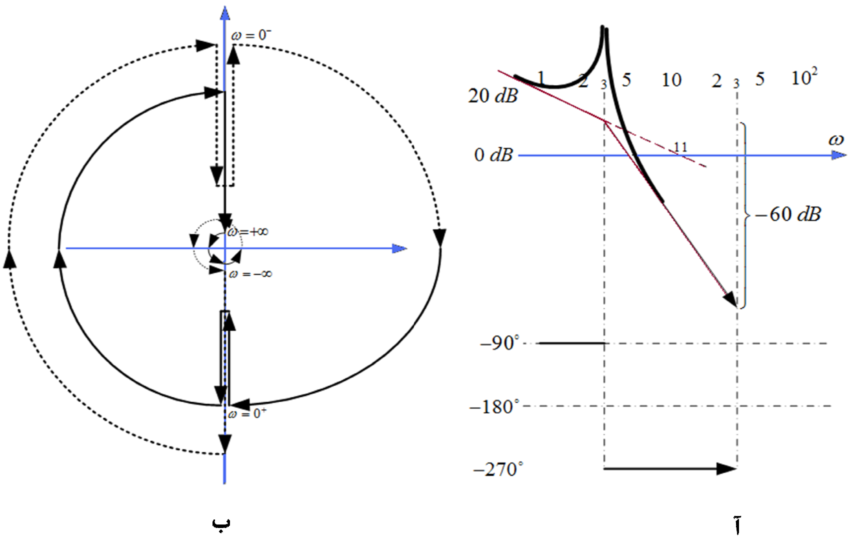
$$H(s) = \frac{100}{s(s^2+9)} \quad \text{(پ۳- ۱۴)}$$

به دلیل قطب در مبدأ، فاز از $-90°$ و انـدازه نیـز از ∞ آغـاز مـی‌گـردد. ایـن تعبیـر در نایکوئیست یعنی شروع از پایین‌تر نقطهٔ منفی محور موهومی به سمت بالا و در بود یعنی نزول بـا شیبِ $-20\frac{dB}{decade}$. البته این خطِ نزول به گونه‌ای است که منحنی محور $0\ dB$ را در فرکـانس $11 \cong \frac{100}{9}$ قطع کند. اما فاز تا به قطبِ $3j$ نرسیده است، همان $-90°$ باقی می‌ماند. البته انـدازه که در حال نزول بود، دوباره با نزدیک شدن به این قطب شروع به افزایش می‌کند و به بی‌نهایـت میل می‌نماید.

و اما هنگام دور زدن از سمت راستِ این قطب، منحنی نایکوئیست، یک نیم‌دایرهٔ بـزرگ در جهت عقربه‌ها خواهد داشت و فاز به $-270°$ می‌رسـد ایـن درحالیسـت کـه انـدازه همچنـان بی‌نهایت است. در نایکوئیست این موضوع با رفـتن و رسـیدن بـه بـالاترین نقطـهٔ مثبـت محـور موهومی معادل است.

با دور شدن از این قطب، اندازه دوباره رو به کم شدن می‌گذارد. ولی از این پس نزولِ آن با شیبِ $-60\frac{dB}{decade}$ خواهـد بـود درحـالی کـه فـاز همـان $-270°$ مـی‌مانـد. ایـن قطـب در نایکوئیست، باعث سقوط روی محور موهومی از بالا به سمتِ مبدأ می‌گردد.

در اینجا «بود» تمام شد ولی برای نایکوئیست باید گفت که تبـدیل‌یافتـهٔ دایـرهٔ بسـیار بزرگ نیز سه نیم‌دایرهٔ بسیار کوچک در خلاف جهتِ عقربه‌ها خواهد بود و از این پـس بـا قرینـهٔ آنچه تاکنون نسبت به محور حقیقی رسم شده‌است، کار برای نایکوئیست ادامه می‌یابد. شـکل پ ۳- ۱۱ نتیجه این توضیحات را نمایش می‌دهد.



شکل پ ۳– ۱۱– آ. نمایش بودی و ب. نمایش نایکوئیست تابع تبدیل ($\frac{100}{s(s^2+9)}$)

مثال پ۳– ۶)

تمرین پ۳– ۲–

مشاهده می‌کنید که در مثال پ۳–۷ فرکانسی هست که در آن، اندازه تابع تبدیل کمینهٔ محلی می‌گردد. این فرکانس و مقدارِ کمینه را به دست آورید و با آنچـه بـه طـور تقریبـی از روی شکل پ ۳– ۱۱حدس زده می‌شود، مقایسه کنید.

تمرین پ۳– ۳–

برای تابع تبدیل‌های زیر رسم‌های بود و نایکوئیست را اجرا کنید.

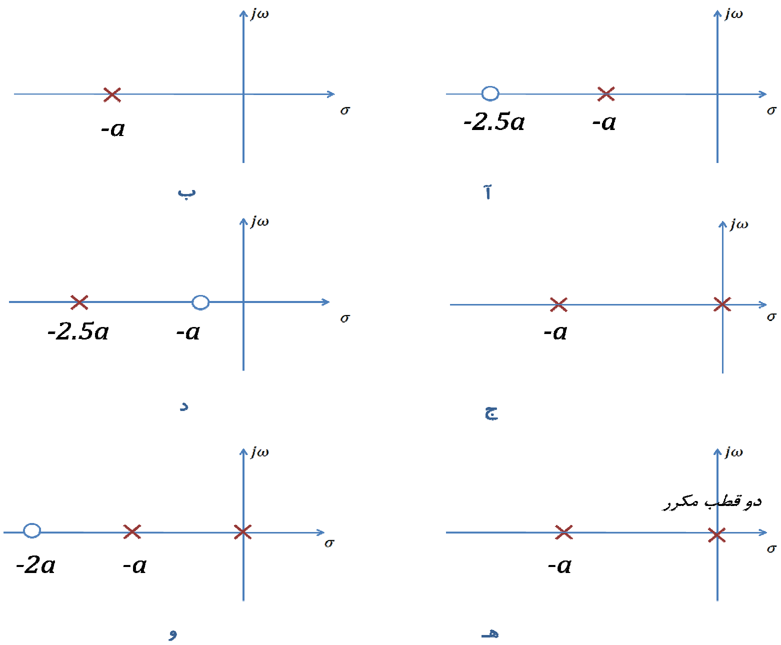
$$\frac{s+2\omega}{s(s+\omega)} \qquad \frac{s+\omega}{s(s+5\omega)}$$

$$\frac{1}{s(s+\omega)} \qquad \frac{1}{s^2(s+\omega)}$$

$$\frac{\omega-s}{\omega+s}$$

تمرین پ۳- ۴-

دیاگرام قطبی(نایکوئیست) هریک از توابع تبدیلی که ترکیب قطب‌ها و صفرهای آنها داده شده‌اند را تعیین کنید.



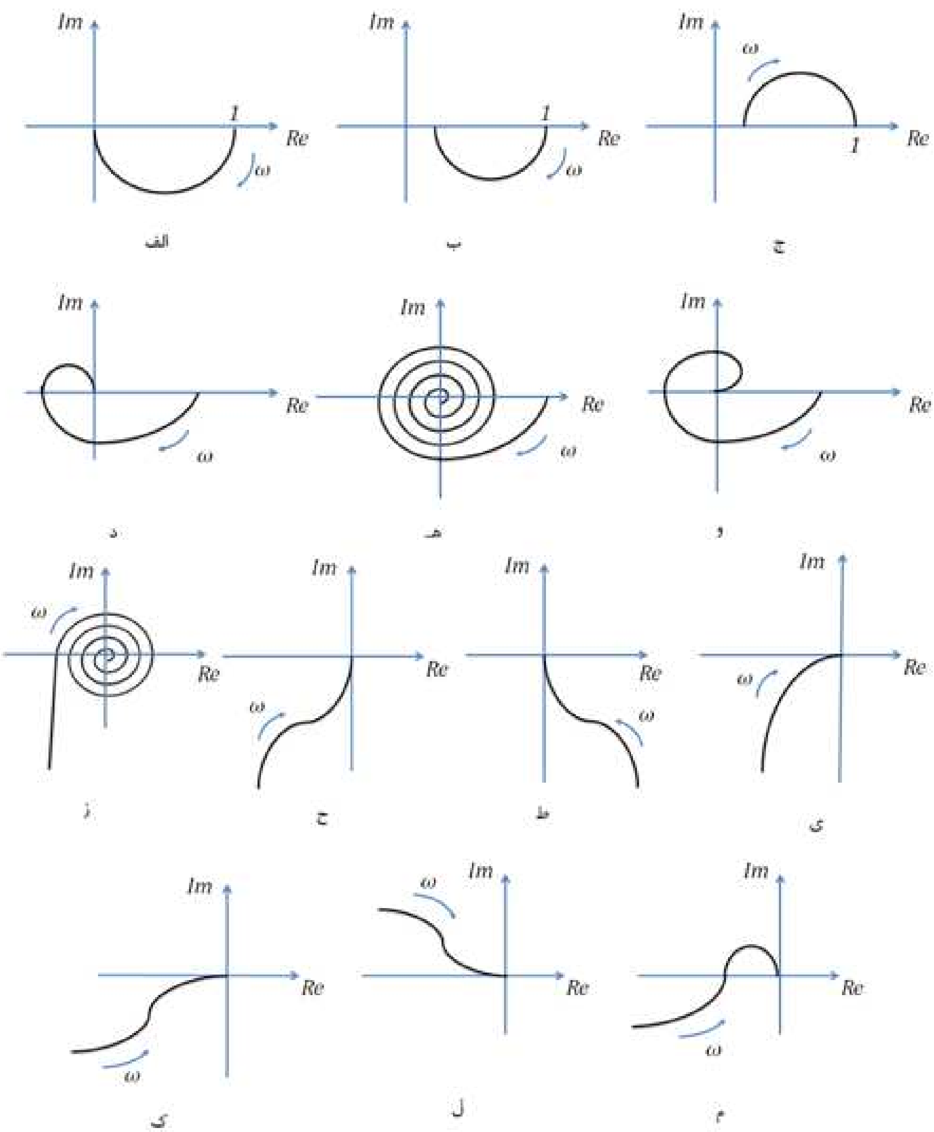
شکل پ ۳- ۱۲- ترکیب قطب و صفر در توابع تبدیل مختلف؛ تمرین پ۳-۴

تمرین پ۳- ۵

نمایشِ قطبی و بـودیِ شـبکهٔ سـرعتی $a > 1$ $\;k\frac{\left(\frac{1}{\omega_z}s+1\right)}{\frac{1}{\omega_p}s+1} = k\frac{\left(\frac{1}{\omega_z}s+1\right)}{\frac{1}{a\omega_z}s+1}$ و شـبکهٔ جمعگر $a > 1$ $\;\acute{k}\frac{(s+\omega_z)}{s+\omega_p} = \acute{k}\frac{(s+a\omega_p)}{s+\omega_p}$ را رسم کنید. سپس بگویید به نظرِ شما چرا این دو شبکه، به ترتیب، پیشفاز و پسفاز نیز خوانده می‌شوند.

تمرین پ۳- ۶

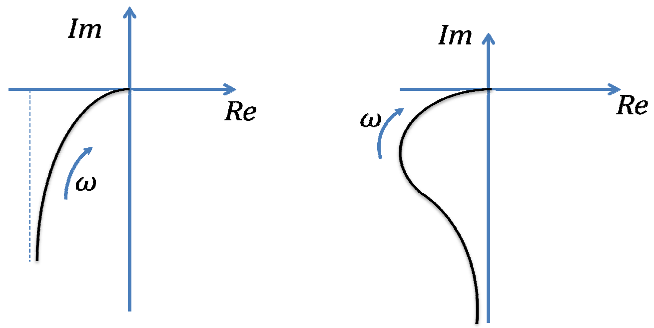
در شکل‌های زیر تعدادی دیاگرام قطبی (نایکوئیست) داده شده‌اند. سعی کنید تابع تبدیل هریک را بیابید. محل صفرها و قطب‌ها را نسبت به هم معین کنید.



شکل پ ۳– ۱۳– نمایش‌های قطبی تمرین پ۳-۶

تمرین پ۳- ۷-

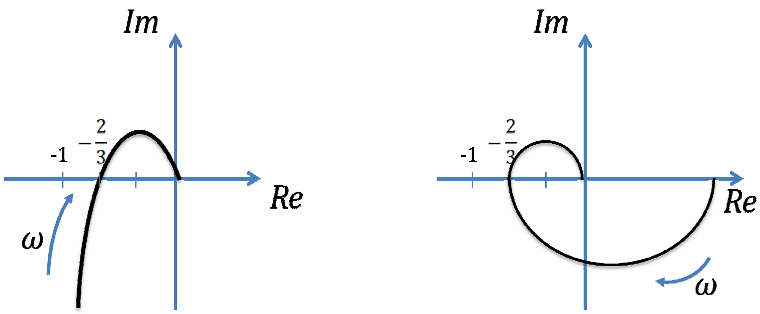
دیاگرام قطبی(نایکوئیست) برای تابع تبدیل‌هایی مانند $H(s) = \frac{k}{s(\tau s+1)}$ بـه دو شـکل زیر داده می‌شود. با تحلیل دقیق رفتار $Re(H(j\omega))$ از $\omega = 0$ الی $\omega = \infty$ بگویید کدامیک درست است. شکل کاملاً دقیقی را با $k = \tau = 1$ به وسیله نقطه یابی متعدد رسم کنید.



شکل پ ۳- ۱۴- نمایش قطبی مربوط به تمرین پ۳-۷

تمرین پ۳- ۸-

نمایش‌های قطبی زیر را در نظر بگیرید. در هر مورد سامانه حلقه بسته‌ای را با استفاده از بازخور واحد از سامانه مربوطه می‌سازیم. به روش نقطه‌یابی هندسی دیاگرام قطبـی سـامانه حلقـه بسته را رسم کنید. حداقل ۴ نقطه را در نظر بگیرید.



شکل پ ۳- ۱۵- دیاگرام قطبی سامانه حلقه باز، تمرین پ۳-۸

معیار نایکوئیست برای پایداریِ «نتیجهٔ حلقه» از روی نایکوئیستِ «بهرهٔ حلقه»

هر آنچه کمک کند تا با داشتنِ بهرهٔ حلقه به داوری‌ای دربارهٔ نتیجهٔ حلقه برسیم، در مهندسیِ کنترل مهم و بسیار ارزشمند تلقی می‌شود. این مسأله باید پیشتر برای شما روشن شده باشد. برای داوری دربارهٔ پایداریِ نتیجهٔ حلقه از روی نمودارِ نایکوئیستِ بهرهٔ حلقه، راه ساده‌ای وجود دارد که در اینجا به آن خواهیم پرداخت. این راه بر یک موضوعِ بسیار سادهٔ ریاضی بنا شده است.

فرض کنید یک نگاشت از اعداد مختلط به اعداد مختلط داشته باشید. تابع تبدیلِ $H(s)$ چنین نگاشتی است که هر نقطه از صفحهٔ s را که در دامنهٔ H باشد به نقطه‌ای در صفحهٔ H می‌برد. در به دست آوردن پاسخِ فرکانسی، در واقع مشغولِ محاسبهٔ تبدیل‌یافتهٔ تمامیِ نقاطِ روی نیمه مثبتِ محور موهومی هستیم. البته در نایکوئیست کاری کردیم که یک منحنیِ بسته از محور موهومی به گونه‌ای شکل گیرد که همهٔ سمتِ راستِ محور موهومی را در برگیرد. دلیل این کار در همین‌جا به زودی معلوم خواهد شد.

اگر منحنیِ بسته‌ای را در صفحهٔ s در نظر بگیرید کـه نگاشـتِ H در تمـامیِ نقـاطِ آن تحلیلی، یعنی تعریف شده و پیوسته باشد (مانند آنچه در شکل پ ۳- ۲ نشـان داده شـده اسـت)، آنگاه پر واضح است که تبدیل‌یافتهٔ این منحنیِ بسته در صفحهٔ H منحنیِ بسته‌ای خواهد شد. [5]

نکتهٔ اصلی ایـن اسـت کـه بـه ازای هـر صـفری در درونِ منحنـیِ اولیـه، فـازِ منحنـیِ تبدیل‌یافته، $360°$ تغییر خواهد نمود. به لحاظ هندسی یعنی در همان جهتی که منحنیِ اول ایـن صفر را دور زده است، منحنیِ تبدیل یافته، مبدأ را دور خواهد زد. روشن است کـه اگـر قطبـی در درون منحنی باشد، آنگاه منحنی نگاشت یافته، مبدأ را در جهت معکوس دور خواهد زد. خلاصه به تعدادی که صفرها از قطب‌ها بیشتر باشند، در همان جهت مبدأ دور زده خواهد شد.

پس اگر نیم‌دایرهٔ بزرگ در جهت عقربه‌های ساعت دور زده شود، نایکوئیستِ حاصل نیز به تعدادی که صفرهایِ سمت راستی از قطب‌های سمت راستی بیشـتر اسـت، مبـدأ را در جهـت عقربه‌های ساعت دور می‌زند.

$$N = Z - P \qquad \text{(پ۳- ۱۵)}$$

$$N = \text{تعداد دورها در جهتِ ساعت حولِ مبدأ} \qquad \text{(پ۳- ۱۶)}$$

$$Z = \text{تعدادِ صفرهایِ ناپایدار} \qquad \text{(پ۳- ۱۷)}$$

$$P = \text{تعدادِ قطب‌هایِ ناپایدار} \qquad \text{(پ۳- ۱۸)}$$

در ادامه به رابطهٔ بینِ بهرهٔ حلقه ($GH = \frac{N}{D}$) و مخرجِ همهٔ نتایج حلقه ($1 + GH$) توجه می‌کنیم و ضمناً رابطهٔ کلی بالا را برای این مخرج می‌نویسیم.

$$1 + \frac{N}{D} = \frac{D+N}{D} \quad \text{(پ۳- ۱۹)}$$

$$N\{1 + GH\} = Z\{1 + GH\} - P\{1 + GH\} \quad \text{(پ۳- ۲۰)}$$

حال دقت کنید که صفرهایِ ناپایدارِ $1 + GH$ همان قطب‌های ناپایدارِ نتیجهٔ حلقه است و قطب‌هایِ ناپایدارش همان قطب‌های ناپایدارِ بهرهٔ حلقه است. پس داریم:

(پ۳- ۲۱) $N\{1 + GH\} =$ {تعداد قطبهایِ ناپایدارِ نتیجهٔ حلقه} $-$ {تعداد قطبهایِ ناپایدارِ بهرهٔ حلقه}

(پ۳- ۲۲) {تعداد قطبهایِ ناپایدارِ نتیجهٔ حلقه} $= N\{1 + GH\} +$ {تعداد قطبهایِ ناپایدارِ بهرهٔ حلقه}

و اما نایکوئیستِ GH با نایکوئیستِ $1 + GH$ چه فرقی دارد؟ اگر تمامیِ نقاط به دست آمدهٔ اولی را یک واحدِ حقیقی، به سمتِ راست انتقال دهیم منحنی دوم به دست می‌آید. لذا بررسی$N\{1 + GH\}$ حول مبدأ معادل است با بررسی $N\{GH\}$ حول نقطهٔ -1 . به این ترتیب لازم نیست نایکوئیست $1 + GH$ رسم گردد بلکه همان نایکوئیست GH کفایت خواهد نمود و می‌توان عبارت بالا را به صورت زیر نهایی نمود.

(پ۳- ۲۳) {تعداد قطبهایِ ناپایدارِ نتیجهٔ حلقه} $=$ {تعداد دورهای بهرهٔ حلقه حولِ -1} $+$

{تعداد قطبهایِ ناپایدارِ بهرهٔ حلقه}

و اگر نام‌گذاری را به صورت زیر قرارداد کنیم:

(پ۳– ۲۴) $Z =$ تعداد قطبهایِ ناپایدارِ نتیجهٔ حلقه

(پ۳– ۲۵) $P =$ تعداد قطبهایِ ناپایدارِ بهرهٔ حلقه

(پ۳– ۲۶) $N =$ در جهتِ ساعت -1 تعداد دورهای نایکوئیستِ بهرهٔ حلقه حولِ

آنگاه می‌توان نوشت:

(پ۳– ۲۷) $Z = N + P$

اگر GH را به جایِ $\frac{n}{d}$ به صورت $k\frac{n}{d}$ در نظر بگیرید، آنگاه کافی است به جایِ بررسی تعداد دورها حولِ -1 دورهای منحنی را حولِ $-\frac{1}{k}$ بشمارید و به این ترتیب می‌توانید به ازایِ kهای گوناگون بحث پایداری را انجام دهید. با تغییر دادنِ k ، نقطهٔ $-\frac{1}{k}$ (که دور زدن را باید حول آن شمرد) نیز جابجا می‌گردد. در نتیجه تعداد دور زدن نیز ممکن است تغییر کند. این کار در ادامه Z را نیز تغییر می‌دهد و نتیجه‌گیری دربارهٔ پایداری به ازایِ kهای گوناگون تغییر خواهد نمود.

در ادامه با توجه به نمونه‌هایی که در بخش پیشین نایکوئیستِ آنها رسم شده‌اند، دربارهٔ پایداریِ حلقه‌ای که آنها بهرهٔ حلقه‌شان باشند، بحث می‌کنیم. برای شمردن تعداد دور توصیه

می‌شود، برداری را در نظر بگیرید که ابتدای آن، نقطهٔ -1 است و انتهای آن روی نقاطِ نایکوئیست است. سپس از هر نقطهٔ دلخواهی که خواستید آغاز کنید. مسیر را روی نایکوئیست طی نمایید تا دوباره به نقطهٔ آغازین بازگردید. در فرآیندِ طی مسیر، زاویهٔ نهایی را که این بردار جاروب می‌کند، به دست آورید. تعداد $360°$ هایی که در این زاویهٔ جاروب شده است، همان تعداد دورهایی است که می‌خواهید.

مثال پ۳- ۸-

می‌خواهیم دربارهٔ پایداریِ حلقه‌ای که بهرهٔ حلقهٔ آن $k\frac{2}{s+2}$ است به ازای kهای گوناگون بحث کنیم. نایکوئیست $\frac{2}{s+2}$ را در شکل پ ۳- ۴ در نظر بگیرید. دقت کنید که در اینجا $P=0$ است و لذا $Z=N$. پس کافی است تعداد دفعاتی که نایکوئیست مزبور نقطهٔ $-\frac{1}{k}$ را دور می‌زند، بیابیم. برای kهای مثبت از 0 تا ∞ ، $-\frac{1}{k}$ از چپ‌ترین قسمت محور حقیقی شروع و به مبدأ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد. در اینجا به ازای تمامیِ kهای مثبت $N=0$ و لذا $Z=0$ است و حلقه پایدار است. اما برای kهای منفی، $-\frac{1}{k}$ از راست‌ترین قسمت محور حقیقی شروع شده به مبدأ نزدیک می‌گردد. ملاحظه می‌کنید که تا $-\frac{1}{k}=1$ (یا معادلاً $k=-1$)، هنوز $N=0$ و $Z=0$ است و پایداری داریم. اما از $-\frac{1}{k}=1$ تا $-\frac{1}{k}=0$ (یا معادلاً از $k=-1$ تا $k=-\infty$)، $N=1$ است و لذا $Z=1$ است و لذا یک قطب ناپایدار به وجود می‌آید و حلقه به ازایِ این بهره‌ها، ناپایدار است. که البته به خوبی می‌دانید که از تحلیل مکان هندسی و روث نیز همین نتایج به دست می‌آیند.

مثال پ۳– ۹–

می‌خواهیم دربارهٔ پایداریِ حلقه‌ای بحث کنیم که بهرهٔ حلقهٔ آن $\frac{k}{s}$ است. نایکوئیست این بهرهٔ حلقه را در شکل پ ۳– ۸ رسم کرده‌ایم. توجه کنید که برای kهای مثبت یعنی $-\frac{1}{k}$ های منفی، $N = 0$ است. از طرفی چون قطب‌های روی محور را جزوِ سمت راستی‌ها در نظر نگرفته‌ایم لذا $P = 0$ است. پس در اینجا نیز داریم $Z = N$. پس برای تمامیِ kهای مثبت حلقه پایدار است. و اما برای kهای منفی ($-\frac{1}{k}$ مثبت)، $N = 1$ است و لذا حلقه یک قطب ناپایدار دارد. البته این نتیجه از همهٔ روش‌های مکان هندسی و روث نیز به آسانی معلوم بود.

مثال پ۳– ۱۰–

می‌خواهیم دربارهٔ پایداریِ حلقه‌ای بحث کنیم که بهرهٔ حلقهٔ آن $\frac{10}{s-1}$ است. ابتدا ملاحظه کنید که $P = 1$ است. دقت کنید که برای kهای مثبت، تا $-\frac{1}{k}$ به -10 نرسیده که معادلاً یعنی $k < 0.1$ و همچنین برای تمامیِ kهای منفی، $N = 0$ است. لذا $Z = 1$ است و حلقه ناپایدار است. و اما برای $-10 > -\frac{1}{k} > 0$ یعنی $\frac{1}{10} > k > \infty$ ، داریم : $N = -1$ و لذا $Z = 0$ و حلقه پایدار می‌گردد.

مثال پ۳- ۱۱-

می‌خواهیم دربارهٔ پایداریِ حلقه‌ای بحث کنیم که بهرهٔ حلقهٔ آن $\frac{8000(s+5)}{s(s+100)(s-400)}$ است. ابتدا ملاحظه کنید که $P = 1$ است. دقت کنید که برای همهٔ kهای مثبت، $N = 1$ است و لذا $Z = N + P = 2$ است و در نتیجه حلقه به ازای kهای مثبت دو قطب ناپایدار دارد. به ازای kهای منفی نیز $N = 0$ است و لذا $Z = 1$ بوده و هنوز حلقه دارایِ یک قطبِ ناپایدار است.

تمرین پ۳- ۹-

نتیجه تحلیل

مثال پ۳- ۱۱را با روش‌های مکان هندسی و روث نیز محک بزنید.

مثال پ۳- ۱۲-

می‌خواهیم دربارهٔ پایداریِ حلقه‌ای بحث کنیم که بهرهٔ حلقهٔ آن $\frac{100}{s(s^2+9)}$ است. ابتدا ملاحظه کنید که $P = 0$ است. دقت کنید که برای همهٔ kهای مثبت، $N = 2$ است و لذا $Z = 2$ است و در نتیجه حلقه به ازای همهٔ kهای مثبت دو قطب ناپایدار دارد. به ازای kهای منفی نیز $N = 1$ و لذا برای این مقادیر از k نیز هنوز حلقه دارای یک قطبِ ناپایدار است.

تمرین پ۳- ۱۰-

نتیجه مثال پ۳- ۱۲را با روش‌های مکان هندسی و روث نیز محک زنید.

ملاحظه نمودید که آنچه در به کارگیریِ نایکوئیست برای آزمون پایداری مهم است نقاط تقاطع با محور حقیقی است. گاهی این نقاط به سادگی به دست نمی‌آیند. برای یافتن دقیق‌تر این نقاط چنانچه لازم باشد، می‌توان از راه‌های گوناگون استفاده کرد. مثلاً می‌توان فرکانس یا فرکانس‌هایی را به دست آورد که در آنها فاز برابر با ضرایب صحیحِ $180°$ می‌شود. سپس در این فرکانس‌ها اندازه را محاسبه نمود. اگر ضریب زوج $180°$ بود، در قسمت مثبت حقیقی تقاطعی داریم و اگر ضریب فرد بود در قسمت منفی. راه دیگر این است که مقدارِ موهومی را برابر صفر قرار دهید. به ازای فرکانسی که اینگونه به دست می‌آید مقدار حقیقی نقاط تقاطع نایکوئیست تعیین خواهد شد.

مثال پ۳- ۱۳-

می‌خواهیم دربارهٔ پایداریِ حلقه‌ای بحث کنیم که بهرهٔ حلقهٔ آن $\frac{10^5(s+10)^2}{s^2(s+1)(s+100)^2}$ است.

ابتدا ملاحظه کنید که $P=0$ است. پس در این مسئله $Z=N$ است. اما لازم است نایکوئیست را رسم کنیم.

در شروع، فاز $-180°$ است و در پایان چون تعداد قطب‌ها از صفرها سه تا بیشتر است، فاز به $-270°$ می‌رسد. اما در این میان ابتدا به دلیل قطبِ در -1 فاز به سمتِ بالای محور حقیقی میل می‌کند ولی به دلیل دو صفرِ -10 این فاز دوباره به سمت محور حقیقی متمایل می‌شود و حتی آن را قطع می‌کند و از آن پایین‌تر نیز می‌آید. در ادامه دو قطبِ دیگری که در -100

هستند باعث می شوند که نایکوئیست به بالای محور برگردد و دوباره آن را قطع کند. مطابق با این تحلیل دو نقطهٔ تقاطع با محور حقیقی را برای نایکوئیست احتمال می‌دهیم.

برای یک حدسِ خوب کافی است توجه کنید که در فرکانس 1 حدوداً به $-180-45$ و در فرکانس 10 به $-180 = 45 \times 2 + 90 - 180-$ حدوداً می‌رسد. که این یعنی حدوداً در همین فرکانس تقاطعی داریم. حال سعی می‌کنیم با سعی و خطا این را دقیقاً بیابیم.

$$\text{فازِ کل} = -180 - tan^{-1}\,\omega + 2\,tan^{-1}\frac{\omega}{10} - 2\,tan^{-1}\frac{\omega}{100} \qquad \text{(پ۳- ۲۸)}$$

$$\omega = 10 \rightarrow \ \text{فاز} = -185 \ \ldots \omega = 11.6 \rightarrow \text{فاز} = -180 \qquad \text{(پ۳- ۲۹)}$$

با سعی و خطا به فرکانسِ 11.6 می‌رسیم. حال در این فرکانس کافی است اندازه را به دست آوریم.

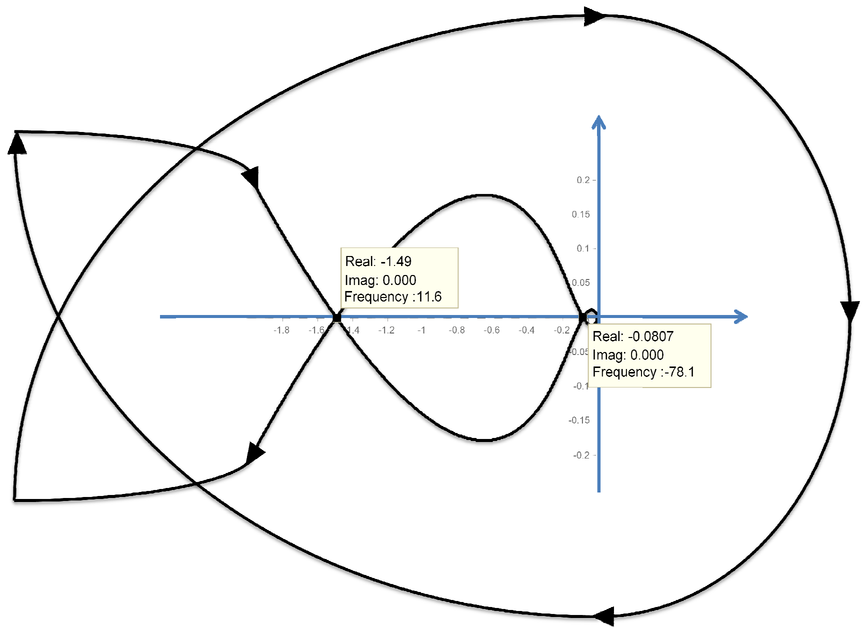
$$\frac{10^5(100+\omega^2)}{\omega^2\sqrt{1+\omega^2}(10^4+\omega^2)} \qquad \text{(پ۳- ۳۰)}$$

$$\omega = 11.6 \ \rightarrow \ \text{اندازه} = 1.48 \qquad \text{(پ۳- ۳۱)}$$

پس یک نقطهٔ تقاطع -1.48 می‌شود و اما نقطهٔ دیگر قاعدتاً حول و حوش فرکانس 100 است. دوباره با سعی و خطا کار را ادامه می‌دهیم.

$$\omega = 100 \ \text{فاز} = -191 \ \ldots \rightarrow \omega = 78.5 \ldots \rightarrow \text{اندازه} = 0.08 \qquad \text{(پ۳- ۳۲)}$$

به این ترتیب نقطهٔ دوم تقاطع نیز -0.08 خواهد بود. لذا نایکوئیست به طور تقریبی به شکل پ ۳– ۱۶ رسم می‌شود.



شکل پ ۳– ۱۶– نمودار نایکوئیست برای تابع تبدیل $\frac{10^5(s+10)^2}{s^2(s+1)(s+100)^2}$؛ مثال پ۳–۱۳

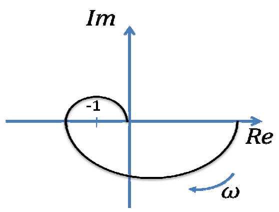
برای kهای مثبت تا $-\frac{1}{k} < -1.48$ (یا $k < \frac{1}{1.48}$)، $N = 1$ است و لذا حلقه یک قطب ناپایدار دارد. برای $-1.48 < -\frac{1}{k} < -0.08$ (یا $\frac{1}{1.48} < k < \frac{1}{0.08}$)، $N = 0$ است (یک دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت و یک دور در جهت آن در منحنی اتفاق می‌افتد که در مجموع صفر دور می‌شود). لذا به ازای این بهره‌ها، حلقه پایدار است. برای $-0.08 < -\frac{1}{k} < 0$ یا معادلاً $\frac{1}{0.08} < k < \infty$ ، $N = 2$ و لذا به ازای این بهره‌ها حلقه دارای دو قطب ناپایدار است. و بالاخره برای kهای منفی ملاحظه کنید که $N = 1$ است و لذا حلقه دارای یک قطب ناپایدار خواهد بود.

تمرین پ۳- ۱۱-

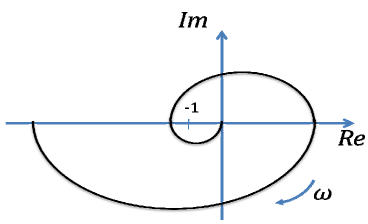
برای تمرین خوب است که به کمک روش مکان هندسی و روث نیز نتایج به دست آمده در مثال پ۳-۱۳ را محک بزنید.

تمرین پ۳- ۱۲-

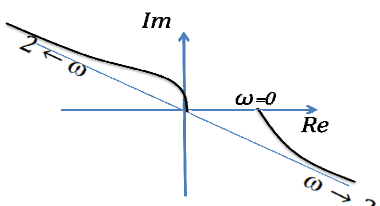
در شکل‌های زیر دیاگرام قطبی چند سیستم داده شده‌اند. ابتدا در مورد پایداری و یا ناپایداری حلقه بسته‌ای که توسط فیدبک واحد این سیستم‌های ساخته می‌شود، اظهار نظر کنید و سپس در مورد تعداد قطب‌های ناپایدار حلقه بسته و حلقه باز هرچه می‌توانید، قضاوت کنید. دقت کنید که دیاگرام فقط برای فرکانس‌های مثبت رسم شده است.



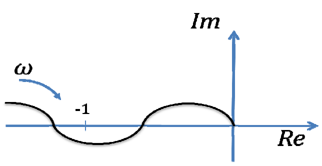
و



هـ



ح



ز

شکل پ ۳- ۱۷- دیاگرام‌های قطبی تمرین پ۳-۱۲

تمرین پ۳- ۱۳-

الف ـ دیاگرام قطبی سامانه‌ای را که تابع تبدیل آن $H(s)$ است. رسم کنید.

$$H(s)=\frac{10s+1}{s(s+1)} \qquad (پ۳- ۳۳)$$

ب ـ با فیدبک واحد از خروجی $H(s)$ یک سامانه حلقه بسته می‌سازیم. دیاگرام بود (فقط اندازه) سامانه حلقه بسته را از روی الف و بدون محاسبه تابع تبدیل آن، به طور تقریبی رسم کنید.

ج ـ پهنای باند سامانه حلقه بسته را از روی شکل قسمت ب بگویید.

د ـ ابتدا از روی شکل قسمت الف حدفاز را بیابید سپس فرکانس گذر 0^{dB} و حد فاز را دقیقاً محاسبه کنید.

هـ ـ با توجه به آنچه در قسمت د به دست آوردید، محاسبه کنید که در فرکانس گذر، شکل به دست آمده در قسمت ب چقدر تقریب دارد.

تمرین پ۳- ۱۴-

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$H(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+1)} \qquad (پ۳- ۳۴)$$

با دو روش الف و ب در مورد پایداری و ناپایداری و تعداد قطب‌های ناپایـدار سـامانه‌ای که از حلقه بسته فیدبک واحد آن به وجود می‌آید به ازای kهای مختلـف (از منفـی بینهایـت تـا مثبت بینهایت) اظهار نظر کنید.

الف ـ با رسم دیاگرام قطبی

ب ـ با به دست آوردن تابع تبدیل حلقه بسته

ستایش از آن خداوند است

مراجع

[1]. H, Nyquist. "Regeneration theory." Bell System.Tech.J, Jan. 1932: 126-147.

[2]. W, Bode H. "Relations between attenuation and phase in feedback amplifire design." (Bell System Tech.J) 1940: 421-454.

[3]. D' Azzo, J J, and C H Houpis. Linear Control System analysis and design. 5nd Edition. New York: McGraw-Hill, 1995.

[4]. Ogata, K. Modern control engineering. 5nd Edition. Prentice Hall, 2009.

[5]. Kuo, B C, and F Golnaraghi. Automatic Control Systems. 8nd Edition. Wiley, 2002.